PŘENESENÉ CHYBY FYZIKÁLNÍCH MĚŘENÍ

Obsah

Úvod - teorie

Často potřebujeme určit veličinu z fyzikálního zákona, tj. matematického vztahu, který určuje její souvislost s několika jinými fyzikálními veličinami, které jsme získali přímým měřením. Například, při měření modulu pružnosti ve smyku musíme nejdříve přímo změřit délku a poloměr měřeného drátu, hmotnost, poloměr zavěšeného válcového tělesa a periodu torzních kmitů. Hledanou veličinu přímo neměříme, ale vypočítáme ji podle příslušného vzorce (fyzikálního zákona). V přímo měřených veličinách se však vždy vyskytují chyby měření, proto se musí i veličina vypočtená podle rovnice vyznačovat určitou chybou měření. Takové chybě říkáme přenesená chyba. Ukážeme jakým způsobem lze provést výpočet takové chyby.

Předpokládejme, že fyzikální veličina X, kterou je nutno určit, je funkcí fyzikálních veličin a, b, c, ... obsažených v daném vzorci, tedy

$$X = f(a,b,c,\dots)\,. \tag{1}$$

Pravděpodobné chyby veličin a, b, c, ... označíme $\vartheta_a, \vartheta_b, \vartheta_c, \dots$ Hledaná pravděpodobná chyba veličiny X bude označena ϑ_X. Její výpočet je třeba provést pomocí rovnice

$$\vartheta_X = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial a}\vartheta_a\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial b}\vartheta_b\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial c}\vartheta_c\right)^2 + \dots}\;, \tag{2}$$

kde vystupují parciální derivace funkce $f(a,b,c,\dots)$ postupně podle proměnných a, b, c, ... Parciální derivací rozumějte takovou derivaci funkce f, při které považujeme všechny ostatní proměnné, kromě té podle níž se derivuje, za konstantní. Celá složitost výpočtu pravděpodobné chyby nepřímého měření ϑ_X tedy spočívá ve správném stanovení příslušných derivací. Aplikaci vztahu (2) si procvičíme na několika příkladech.

Derivace některých jednoduchých funkcí

Nevíte ještě co je to derivace? Nevadí, snažte se derivace provést podle následujících vzorců, ve kterých c je konstanta a e je Eulerovo číslo. Výraz $\frac{df}{dx}$ čteme **derivace funkce f podle x**.

Funkce	**Derivace**
$f(x) = c$	$\dfrac{d\,f}{dx} = 0$
$f(x) = c^n$	$\dfrac{d\,f}{dx} = c\,x^{c-1}$
$f(x) = c^x \ \ (c > 0)$	$\dfrac{d\,f}{dx} = c^x \ln c$
$f(x) = e^x$	$\dfrac{d\,f}{dx} = e^x$
$f(x) = \ln(x)$	$\dfrac{d\,f}{dx} = \dfrac{1}{x}$
$f(x) = \sin x$	$\dfrac{d\,f}{dx} = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$\dfrac{d\,f}{dx} = -\sin x$
$f(x) = \mathrm{tg}\, x$	$\dfrac{d\,f}{dx} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
$f(x) = \mathrm{cotg}\, x$	$\dfrac{d\,f}{dx} = \dfrac{1}{\sin^2 x}$

Příklad 1 - určení přenášené chyby při určení objemu válce

Máme určit objem V válce z naměřeného průměru válce d a jeho výšky h, který je dán vztahem

$$V = \frac{1}{4}\pi\, d^2\, h\ . \tag{3}$$

Označíme-li pravděpodobné chyby průměru válce ϑ_d, výšky válce ϑ_h, můžeme na základě vztahu (2) stanovit pravděpodobnou chybu objemu válce ϑ_V

$$\vartheta_V = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial d}\vartheta_d\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial h}\vartheta_h\right)^2} \tag{4}$$

a po provedení parciálních derivací

$$\vartheta_V = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\pi\, d\, h\, \vartheta_d\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\pi\, d^2\, \vartheta_h\right)^2}\ . \tag{5}$$

Poslední vztah lze výhodně upravit rozšířením prvního členu pod odmocninou zlomkem $\dfrac{2d}{2d}$ a druhého členu zlomkem $\dfrac{h}{h}$, takže bude

$$\vartheta_V = \sqrt{(2\frac{1}{4}\pi\, d^2\, h\frac{\vartheta_d}{d})^2 + (\frac{1}{4}\pi\, d^2\, h\frac{\vartheta_h}{h})^2}\quad , \tag{6}$$

kde vystupují objem $V = \frac{1}{4}\pi\, d^2\, h$ a relativní chyby průměru $\rho_d = \frac{\vartheta_d}{d}$ a výšky válečku $\rho_h = \frac{\vartheta_h}{h}$, tedy

$$\vartheta_V = \sqrt{(2\,V\rho_d\,)^2 + (V\rho_h)^2} = V\,\sqrt{(2\rho_d\,)^2 + (\rho_h\,)^2}\quad . \tag{7}$$

Ještě jednodušší pak bude výpočet relativní chyby objemu válce

$$\rho_V = \sqrt{(2\rho_d)^2 + (\rho_h)^2}\quad . \tag{8}$$

Jak je vidět z rovnice (8), projeví se nepřesnost v měření průměru válce více, než nepřesnost v měření jeho výšky. Tento názor lze zevšeobecnit a říci, že veličiny, jež se v určujícím vzorci vyskytují s vyššími mocninami než 1, je třeba měřit přesněji než ostatní, a to tím přesněji, čím ve vyšší mocnině se vyskytují. Naopak snažit se zvýšit celkovou přesnost zpřesněním ostatních veličin nemůže vést k cíli.

Příklad 2 - určení přenášené chyby při měření modulu pružnosti drátu ve smyku

Dalším praktickým příkladem bude měření modulu pružnosti ocelového drátu ve smyku (torzi). K měření použijeme dynamickou metodu torzních kmitů, kdy na měřený drát zavěsíme válcové těleso, jehož osa splývá s osou drátu a necháme ho torzně, (kroutivým pohybem), kmitat na konci drátu. Pak bude hledaný modul pružnosti ve smyku měřeného drátu určen vztahem

$$G = \frac{4\,\pi\, l\, m\;R^2}{T^2\;r^4}\quad , \tag{9}$$

kde l je délka drátu, r je poloměr jeho průřezu, m je hmotnost zavěšeného tělesa a R poloměr válcového zavěšeného tělesa. T je perioda torzních kmitů. Pomocí obecné rovnice (2), po provedení parciálních derivací

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G}{\partial l} &= \frac{4\,\pi\, mR^2}{T^2\;r^4} = \frac{G}{l}\quad ,\\
\frac{\partial G}{\partial m} &= \frac{4\,\pi\, lR^2}{T^2\;r^4} = \frac{G}{m}\quad ,\\
\frac{\partial G}{\partial R} &= 2\,\frac{4\,\pi\, l\, mR}{T^2\;r^4} = 2\,\frac{G}{R}\quad ,\\
\frac{\partial G}{\partial T} &= -\,2\,\frac{4\,\pi\, l\, mR^2}{T^3\;r^4} = -\,2\,\frac{G}{T}\quad ,\\
\frac{\partial G}{\partial r} &= -\,4\,\frac{4\,\pi\, l\, m\;R^2}{T^2\,r^5} = -\,4\,\frac{G}{r}\quad ,
\end{aligned} \tag{10}$$

dostaneme rovnici pro výpočet pravděpodobné chyby měření modulu pružnosti drátu ve smyku

$$\vartheta_G = G\sqrt{(\frac{\vartheta_l}{l})^2 + (\frac{\vartheta_m}{m})^2 + (2\,\frac{\vartheta_R}{R})^2 + (2\,\frac{\vartheta_T}{T})^2 + (4\,\frac{\vartheta_r}{r})^2}\ . \tag{11}$$

Přechodem na relativní chybu měření modulu pružnosti ve smyku dostaneme

$$\rho_G = \sqrt{\rho_l^2 + \rho_m^2 + (2\rho_R)^2 + (2\rho_T)^2 + (4\rho_r)^2}\ . \tag{12}$$

Předpokládejme, že měření jednotlivých veličin přinesla tyto výsledky:

l = (73,4 ± 0,1) cm

m = (1,203 ± 0,002) kg

R = (12,57 ± 0,02) cm

T = (5,833 ± 0,005) s

r = (0,505 ± 0,002) mm

Dosazením do vztahu (12) získáme pravděpodobnou chybu modulu pružnosti

$$\vartheta_G = 7{,}923.10^{10}\sqrt{(\frac{0{,}1}{73{,}4})^2 + (\frac{0{,}002}{1{,}203})^2 + (2\,\frac{0{,}02}{12{,}57})^2 + (2\,\frac{0{,}005}{5{,}833})^2 + (4\,\frac{0{,}002}{0{,}505})^2} =$$

1

$$= 7{,}923.10^{10}\ \sqrt{0{,}000002 + 0{,}000003 + 0{,}000010 + 0{,}000003 + 0{,}000251} = 0{,}130.10^{10}\ \mathrm{N.m^{-2}}\ .$$

Výsledek zapíšeme ve tvaru

$$G = (7{,}9 \pm 0{,}1).10^{10}\ \mathrm{N.m^{-2}}. \tag{13}$$

Relativní chybu napíšeme v procentech,

$$\rho_G = \sqrt{0{,}14^2 + 0{,}17^2 + 0{,}16^2 + 0{,}17^2 + 1{,}58^2} = 1{,}68\,\%\ . \tag{14}$$

Provedený výpočet chyby ukázal, že modul pružnosti ve smyku vyjde s pravděpodobnou relativní chybou 1,68 %, změříme-li základní veličiny s uvedenou přesností. Největší podíl na této chybě má měření poloměru drátu, jehož relativní chyba je prakticky shodná (1,6 %), zatímco ostatní veličiny přispěly k výsledné chybě modulu pružnosti jen nepatrně. Znovu pozorujeme, že veličiny, které se ve vzorci vyskytují ve vyšší mocnině, musíme měřit přesněji.

Příklad 3 - určení přenášené chyby při měření tloušťky kovové vrstvy nanesené na skle

Dále si všimneme příkladu, kdy hledaná veličina je určena rozdílem přímo měřených veličin. Mějme určit tloušťku kovové vrstvy nanesené na skle. Přímo jsou měřitelné tloušťka skla d a tloušťka skla s nanesenou vrstvou d'. Tyto tloušťky jsme změřili mikrometrem s výsledky d = 1,683 mm a d' = 1,711 mm, v obou případech s pravděpodobnou chybou měření 0,002 mm. Tloušťku nanesené vrstvy budeme hledat jako

$$t = d' - d \tag{15}$$

(B.1)

a pravděpodobnou chybu této tloušťky určíme z obecného vztahu (2) nalezením parciálních derivací $\frac{\partial t}{\partial d'} = 1$ a $\frac{\partial t}{\partial d} = 1$, takže

$$\vartheta_t = \sqrt{\vartheta_{d'}^2 + \vartheta_d^2} \ , \qquad (16)$$

kde $\vartheta_{d'}$, a ϑ_d jsou pravděpodobné chyby tloušťek *d'* a *d*. Numericky, s využitím rovnic (15) a (16), dostaneme t = (0,028 ± 0,003) mm. Výsledek byl určen s relativní chybou ρ_t = 11 %, tedy velmi nepřesně, přestože výchozí tloušťky byly změřeny s velmi dobrou přesností $\rho_{d'} = \rho_d$ = 0,12 %. Nevhodně zvolená metoda měření snížila přesnost výsledku stokrát.

Příklad 4 - určení přenášené chyby při měření modulu pružnosti z příčných kmitů tyče

Chybu nepřímých měření se snažíme určit vždy tím nejjednodušším způsobem. Např. u veličin, které jsou určeny vztahem s převařujícím součinem a podílem veličin obsažených ve vzorci, dáváme přednost výpočtu relativní chyby a z ní teprve zjišťujeme pravděpodobnou absolutní chybu nepřímo měřené veličiny. V případě, že se ve vzorci objevují také součty nebo rozdíly přímo měřených veličin, zavedeme substituce tak, aby tyto aditivní členy byly nahrazeny novou proměnnou.

Ve vzorci pro modul pružnosti z příčných kmitů tyče

$$E = \frac{4\,\pi^2\, m\, l^3}{3\, J\, (T_1^2 - T^2)} \qquad (17)$$

volíme substituci $y = (T_1^2 - T^2)$ a dále pracujeme se vztahem

$$E = \frac{4\pi^2 m\, l^3}{3\, J\, y} \ , \qquad (18)$$

při jehož využití dostaneme relativní chybu modulu pružnosti z příčných kmitů tyče

$$\rho_E = \sqrt{\rho_m^2 + (3\rho_l)^2 + \rho_J^2 + \rho_y^2} \ . \qquad (19)$$

Relativní chybu substituce ρ_y zjišťujeme přes výpočet absolutní chyby

$$\rho_y = \frac{\vartheta_y}{y} = \frac{\sqrt{(2\, T_1\ \vartheta_{T_1})^2 + (2\, T\ \vartheta_T)^2}}{T_1^2 - T^2} \ . \qquad (20)$$