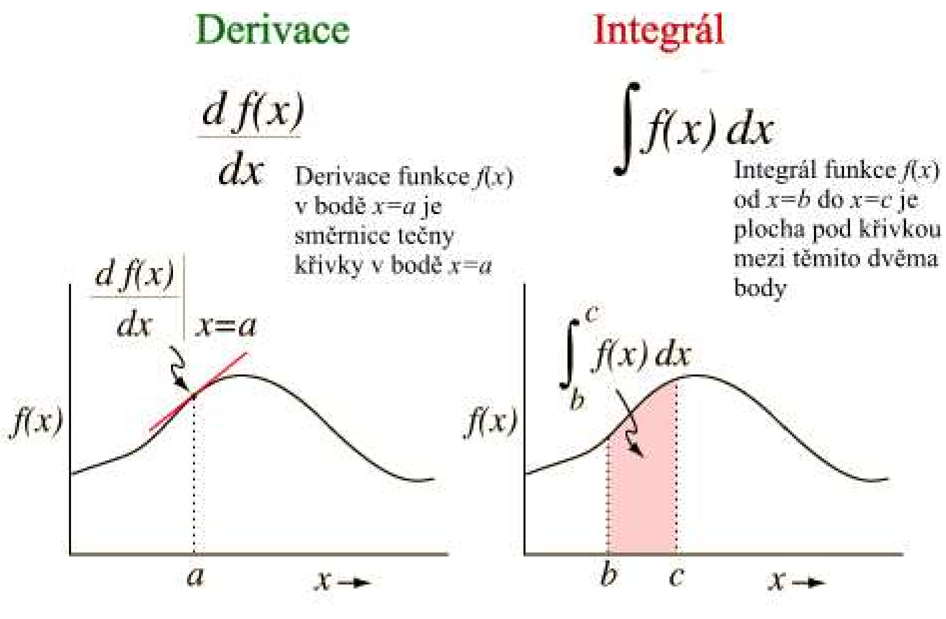
DERIVACE A INTEGRÁLY VE FYZICE

Obsah



obr. 1 K vysvětlení derivace a integrálu

Derivace

Derivace funkce, jak ukazuje obr. 1, vyjadřuje strmost změny této funkce vzhledem k její nezávisle proměnné či proměnným. Opačným procesem k derivování je integrování.

V případě dvourozměrného křivky funkce $f(x)$, je derivace funkce v libovolném bodě (ve kterém existuje) rovna **směrnici tečny** této křivky v daném bodě.

Definice derivace

Pro změnu hodnoty se používá symbol Δ, takže tento poměr lze symbolicky zapsat jako $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Derivace je hodnota podílu pro Δx jdoucí k 0 (zapíšeme $\Delta x \to 0$). Nahradíme-li konečně malý rozdíl Δx nekonečně malou změnou dx, získáme definici derivace $\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}$ (říkáme, že derivace je podílem diferenciálů závislé a nezávislé proměnné). Tento zápis se čte *dy podle dx*. Tento výraz je považován za **symbol**, nikoliv za **zlomek**.

Nejběžnější **definice derivace** funkce je:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad (1)$$

Derivace se značí více způsoby:

a) $f'(x)$ (*f s čarou x*),

b) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} f(x)$ (*d podle d x z f x*),

c) $\frac{\mathrm{d}\,f}{\mathrm{d}\,x}$ (*d f podle d x*),

d) $\dot{x} = \frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} = x'(t)$, (*x s tečkou*) ve fyzice se používá pro derivování podle času (*t*).

Derivovat lze opakovaně, pak získáváme **druhou derivaci**, **třetí derivaci**, atd. Derivace vyšších řádů se ve fyzice označují exponentem, např. $\frac{d^2 y}{dx^2}$ je druhá derivace. Derivace vyšších řádu podle času se označují více tečkami nad derivovanou veličinou, například $\ddot{x}$ je druhá derivace x podle času.

Parciální derivace

Při **parciální derivaci** se u funkce více proměnných považuje za proměnnou jenom ta, podle které se derivuje, ostatní jsou v tomto výpočtu považovány za konstanty. Parciální derivace se značí obdobně jako obyčejné derivace, pouze místo symbolu d se používá symbol ∂, např. $\frac{\partial f}{\partial y}$ značí parciální derivaci funkce *f* podle proměnné y.

Derivace vektorů

Derivací **vektoru** $\vec{v}$ podle proměnné *t* rozumíme vektor, jehož složky získáme derivací složek vektoru $\vec{v}$, tzn.

$$\frac{\mathrm{d}\,\vec{v}}{\mathrm{d}\,t} = \left(\frac{\mathrm{d}\,v_x}{\mathrm{d}\,t}, \frac{\mathrm{d}\,v_y}{\mathrm{d}\,t}, \frac{\mathrm{d}\,v_z}{\mathrm{d}\,t}\right)$$

Výpočty derivací

Derivace funkcí se počítají ze známých derivací několika základních funkcí (základní vzorce derivací) a jednoduchých algebraických pravidel pro jejich další úpravy.

Algebraická pravidla

Pro výpočet derivací platí:

- **Derivace součtu:** $(af+bg)' = af' + bg'$ pro libovolné funkce f, g a konstanty a, b. Speciálně $(af)' = af'$, $(f+g)' = f' + g'$
- **Derivace součinu:** $(fg)' = f'g + fg'$ pro všechny funkce f, g.
- **Derivace podílu:** $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ pro všechny funkce f, g, kde $g \neq 0$.
- **Derivace složené funkce:** Pokud $f(x) = h(g(x))$, pak $f'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x)$.
- **Derivace inverzní funkce:** Pokud jsou $f(x)$ i $f^{-1}(x)$ obě diferencovatelné, pak tehdy, kdy $\Delta x \neq 0$ pokud $\Delta y \neq 0$, platí $\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dx}{dy}\right)^{-1}$.

Základní vzorce derivace funkcí

Funkce $y = f(x)$	Vzorec pro derivaci	Podmínky platnosti vzorce
$y = konst.$	$y' = 0$	$x \in (-\infty;+\infty)$
$y = x^n \quad n \in N$	$y' = n.x^{n-1}$	$x \in (-\infty;+\infty)$
$y = x^{-n} \quad n \in N$	$y' = -n.x^{-n-1}$	$x \in (-\infty;0) \cup (0;\infty)$
$y = x^r \quad r \in R$	$y' = r.x^{r-1}$	$x \in (0;+\infty)$
$y = e^x$	$y' = e^x$	$x \in (-\infty;+\infty)$
$y = a^x \quad 0 < a \wedge a \neq 1$	$y' = a^x.\ln a$	$x \in (-\infty;+\infty)$
$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$	$x \in (0;+\infty)$
$y = \log_a x \quad 0 < a \wedge a \neq 1$	$y' = \frac{1}{x.\ln a}$	$x \in (0;+\infty)$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$	$x \in (-\infty;+\infty)$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$	$x \in (-\infty;+\infty)$
$y = \tan x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$x \in R - \{(2k+1).\frac{\pi}{2}; k \in Z\}$
$y = \cot x$	$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$x \in R - \{k.\pi; k \in Z\}$

Příklady

$f(x) = 3;\ f'(x) = 0,$

$f(x) = x;\ f'(x) = 1,$

$f(x) = 2x;\ f'(x) = 2.1 = 2,$

$f(x) = 5x^3;\ f'(x) = 15x^2;\ f''(x) = 30x$

$f(x) = e^x;\ f'(x) = e^x.$

$f(x) = \ln x;\ f'(x) = x^{-1}.$

$f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 7;\ f'(x) = 3x^2 + 4x - 5.$

$f(x) = \sin x \cdot \cos x;\quad f'(x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x.$

$$f(x) = \frac{1}{\arcsin x};\ f'(x) = \frac{-1}{(\arcsin x)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$f(x) = x^x = e^{x \ln x};\ f'(x) = e^{x \ln x}.(1.\ln x + x\frac{1}{x}) = x^x(\ln x + 1).$$

Lokální extrémy

Pokud má daná diferencovatelná funkce nějaký **lokální extrém** (maximum či minimum), je zřejmé, že její tečna v tomto bodě musí být vodorovná, tzn. **derivace této funkce musí být v tomto bodě nulová**. Pokud v tomto bodě lze spočítat i druhou derivaci, prozradí její znaménko, o jaký extrém se jedná:

- V bodech, kde je první derivace nula a druhá derivace je kladná, se nachází **lokální minimum**.
- V bodech, kde je první derivace nula a druhá derivace je záporná, se nachází **lokální maximum**.
- V bodech, kde je jak první, tak druhá derivace nulová, se nachází tzv. **stacionární bod**, který může a nemusí být extrémem.

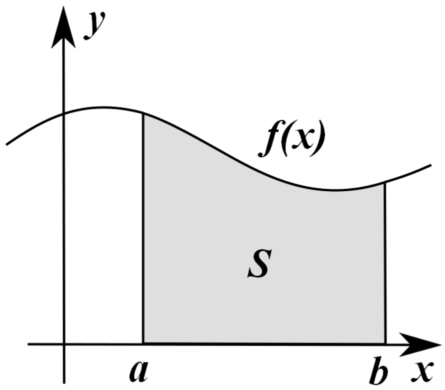
Alternativou k rozlišení pomocí druhé derivace je znaménko první derivace: v bodě, kde má funkce lokální extrém, mění první derivace znaménko: pokud je nějaký bod lokálním minimem, pak v jeho levém okolí je první derivace záporná a v pravém okolí kladná, naopak v levém okolí lokálního maxima je první derivace kladná a v pravém záporná.

Analýza chování funkce

Předchozí odstavec popisuje způsob, jak pro danou funkci nalézt její lokální extrémy. To může sloužit k získání přehledu o **chování funkce**, např. při ručním náčrtu jejího **grafu**. Kromě analýzy extrémů lze využít derivací k následujícím pozorováním:

- V bodech, kde je **první derivace kladná**, je funkce **rostoucí**.
- V bodech, kde je **první derivace záporná**, je funkce **klesající**.
- V bodech, kde je **druhá derivace kladná**, je funkce **konvexní**.
- V bodech, kde je **druhá derivace záporná**, je funkce **konkávní**.
- V bodech, kde je **druhá derivace nulová**, se mohou vyskytovat **inflexní body**.

Integrál



Jednoduše řečeno je určitý integrál nezáporné funkce $f(x)$ mezi dvěma body a, b roven ploše obrazce omezeného přímkami $x=a$, $x=b$, osou x a křivkou definovanou grafem funkce f.

Integrál se značí stylizovaným protaženým písmenem S (z latinského *summa*). Integrál z předchozího odstavce by se značil jako

$$\int_a^b f(x)\,dx\,,$$

kde znaménko $\int$ značí integrování, a a b jsou integrační meze (jen u určitého integrálu), dx označuje proměnnou, podle které se integruje.

Algebraická pravidla

Pro výpočet integrálů platí zejména:

$$\int a\ f(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$$

$$\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$$

Tabulka integračních vzorců

U neurčitého integrálu je třeba k řešení přičíst integrační konstantu. Integrační konstantu zapíšeme až za konečný tvar výsledku.

Funkce $y = f(x)$	**Vzorec pro neurčitý integrál** $\int f(x)dx = F(x)+c$	**Podmínky platnosti vzorce** $(x\in D(f))$
$y=0$	$\int 0\ dx = c\ (c\in R)$	$x\in(-\infty;+\infty)$
$y=1$	$\int dx = x+c$	$x\in(-\infty;+\infty)$
$y=x^n, n\in N$	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}+c$	$x\in(-\infty;+\infty)$
$y=\frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{x}dx = \ln\lvert x\rvert + c$	$x\in(-\infty;0)\cup(0;\infty)$
$y=e^x$	$\int e^x dx = e^x + c$	$x\in(-\infty;+\infty)$
$y=a^x\ (a>0, a\neq 1)$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}+c$	$x\in(-\infty;+\infty)$
$y=\sin x$	$\int \sin x dx = -\cos x + c$	$x\in(-\infty;+\infty)$
$y=\cos x$	$\int \cos x dx = \sin x + c$	$x\in(-\infty;+\infty)$

$y=\tan x$	$\int \tan x\,dx = -\ln\lvert \cos x \rvert + c$	$\cos x \neq 0,\quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k\ celé$
$y=\cot x$	$\int \cot x\,dx = \ln\lvert \sin x \rvert + c$	$\sin x \neq 0,\quad x \neq k\pi,\ k\ celé$
$y=\frac{1}{\cos^2 x}$	$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + c$	$x \in \bigcup_{k\in Z}\left((2k-1)\frac{\pi}{2};(2k+1)\frac{\pi}{2}\right)$
$y=\frac{1}{\sin^2 x}$	$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot x + c$	$x \in \bigcup_{k\in Z}(kx,(k+1)\pi)$
$y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + c$	$x \in (-1,1)$
$y=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arccos x + c$	$x \in (-1,1)$
$y=\frac{1}{1+x^2}$	$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x + c$	$x \in (-\infty;+\infty)$
$y=-\frac{1}{1+x^2}$	$\int -\frac{1}{1+x^2}dx = \operatorname{arccot} x + c$	$x \in (-\infty;+\infty)$

Určitý integrál

Určitý integrál vztahujeme (na rozdíl od integrálu neurčitého) k intervalu, přičemž rozsah intervalu ovlivňuje hodnotu integrálu. Výsledkem určitého integrálu je obvykle nějaké číslo.

Určitý integrál značíme podobně jako integrál neurčitý, navíc však vyznačujeme interval, na kterém integrujeme. Např. integrál funkce *f(x)* na intervalu $I = \langle a,b\rangle$ značíme $\int_a^b f(x)\,dx$

Řešení určitého integrálu pomocí neurčitého

Určitý integrál vyřešíme tak, že nejdříve vyřešíme neurčitý integrál. Potom do řešení dosadíme horní mez. Následně do téhož řešení dosadíme spodní mez a tento člen odečteme. Tedy

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left(\int f(x)\,dx\right)_{x=b} - \left(\int f(x)\,dx\right)_{x=a}.$$

Je zřejmé, že v případě určitého integrálu se integrační konstanta vyruší a proto ji nemusíme používat.

Příklad

Vypočítejte hodnotu určitého integrálu funkce $y = ax$ na intervalu $I = \langle 3,7\rangle$.

Řešení:

$$\int_3^7 ax\,dx = \left(a\frac{x^2}{2}\right)_{x=7} - \left(a\frac{x^2}{2}\right)_{x=3} = \frac{1}{2}a(7^2-3^2) = \frac{40}{2}a = 20a$$