ÚVOD DO DYNAMIKY HMOTNÉHO BODU

Obsah

Co je to dynamika?

Zatímco kinematika je část mechaniky, která popisuje pohyb hmotných objektů, **dynamika je část mechaniky, která se zabývá příčinami pohybu a příčinami změn pohybu** hmotných objektů (hmotného bodu nebo tělesa). Příčinou pohybu a jeho změn je **síla**, a proto je síla nejdůležitější veličinou dynamiky. Dynamika využívá kinematické veličiny, jako jsou poloha nebo rychlost, jen v druhotně v souvislostech.

Základní veličiny dynamiky

Základní veličiny dynamiky jsou **hmotnost**, **hybnost** a **síla**.

Hmotnost

Hmotnost je skalární veličina, která vyjadřuje **míru setrvačných a gravitačních vlastností tělesa**. Je to jedna ze 7 základních veličin fyziky. Základní jednotkou hmotnosti je **kg**.

Hybnost

Hybnost $\vec{p}$ je vektorová veličina, která vyjadřuje míru setrvačných účinků a míru gravitačních účinků tělesa dané hmotnosti m. Hybnost závisí na hmotnosti m a rychlosti $\vec{v}$

tělesa, směr hybnosti je stejný jako směr rychlosti. Definice hybnosti je

$$\vec{p} = m\,\vec{v}\,. \qquad (1)$$

Jednotka hybnosti je **kg.m.s^{-1}**.

Síla

Síla je **vektorová** fyzikální veličina, která vyjadřuje míru **vzájemného působení těles**. Síla má za následek buďto změnu pohybového stavu těles nebo jejich deformaci. Pokud chceme sílu definovat obecně i pro relativistickou fyziku, musíme sílu definovat jako časovou derivaci hybnosti tělesa $\vec{p}$

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}\,. \qquad (2)$$

V klasické mechanice (v případech, kdy lze zanedbat změnu hmotnosti při pohybu) přejde rovnice $\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$ na tvar $\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(m\,\vec{v})}{\mathrm{d}t} = m\,\vec{a}$, tedy

$$\vec{F} = m\,\vec{a} \qquad (3)$$

Rovnice (2) a (3) představují **druhý Newtonův zákon síly**. Jednotka síly je newton, **N=kg.m.s^{-2}**.

Newtonovy pohybové zákony

Newtonovy pohybové zákony jsou fyzikální zákony formulované **Isaacem Newtonem**. Popisují vztah mezi pohybem tělesa a silami, které na toto těleso působí. Newton zavedl celkem **tři pohybové zákony**, které tvoří **základ klasické dynamiky**. Tyto zákony umožňují určit jaký bude pohyb tělesa **v inerciální vztažné soustavě** (viz Inerciální a neinerciální soustavy), jsou-li známy síly působící na těleso. Po **zahrnutí zdánlivých sil** jsou Newtonovy pohybové zákony **použitelné i v neinerciálních soustavách**.

První Newtonův zákon - zákon setrvačnosti

Těleso setrvává **v pohybu rovnoměrném přímočarém nebo klidu**, pokud není nuceno silovým působením jiných těles (tedy **vnější silou**) tento stav **změnit**. Tento zákon lze formulovat pomocí fyzikálních veličin síly a hybnosti: **Pokud na těleso nepůsobí vnější síla, jeho hybnost se nemění.**

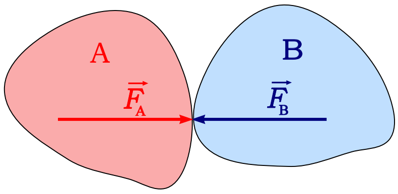
$$\vec{F} = 0 \;\Leftrightarrow\; \vec{p} = konst. \qquad (4)$$

Druhý Newtonův zákon - zákon síly

Jestliže na těleso působí výsledná síla $\vec{F}$, pak se těleso pohybuje se zrychlením $\vec{a}$, které je přímo úměrné působící síle a nepřímo úměrné hmotnosti tělesa.

$$\vec{F} = m\,\vec{a} \text{ nebo obecněji } \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \qquad (5)$$

Tato rovnice je známá jako **pohybová rovnice**. Jak rozebereme později, ve tvaru (5) platí pohybová rovnice jen pro hmotný bod nebo pro translační (posuvný) pohyb tuhého tělesa.



obr. 1 K třetímu Newtonovu zákonu, akce a reakce

Třetí Newtonův zákon - zákon akce a reakce

Jestliže těleso A působí na těleso B silou $\vec{F}_A$, potom těleso B působí na těleso A stejně velkou ale opačnou silou $\vec{F}_B$, tedy platí

$$\vec{F}_A = -\vec{F}_B \qquad (6)$$

Sílu $\vec{F}_A$ nazýváme **akce** a sílu $\vec{F}_B$ nazýváme **reakce**. Třetí Newtonův zákon představuje základ části fyziky, kterou nazýváme **statika**.

Před dalším studiem si přečtěte Inerciální a neinerciální soustavy.

Řešení pohybové rovnice

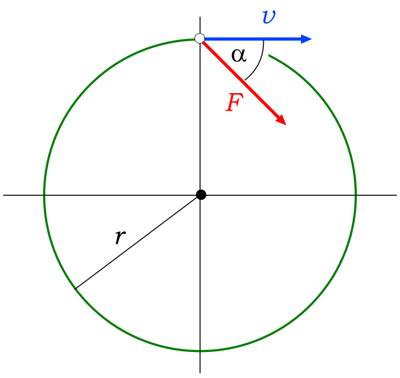
Většinu úloh, kdy máme najít souvislost mezi příčinou pohybu, tj. působící silou a popisem pohybu, tj. polohou, rychlostí, zrychlením …, řešíme s využitím pohybové rovnice. Existují dvě úlohy:

Přímé řešení pohybové rovnice

Jestliže známe trajektorii, můžeme určit působící sílu. Tato úloha je jednoduchá (dvojí derivování polohového vektoru podle času).

Postup řešení:

1. Zvolíme souřadný systém
2. Jelikož máme zadaný polohový vektor $\vec{r}$, derivováním podle času najdeme rychlost $\vec{v}$ a zrychlení $\vec{a}$.
3. Sílu najdeme přímým dosazením zrychlení $\vec{F} = m\vec{a}$
4. Napíšeme tři (nebo dvě) skalární rovnice pro F_x, F_y, F_y . Tím je úloha vyřešena.



obr. 2 K příkladu pohyb po kružnici

Příklad

Hmotný bod o hmotnosti $m = 10$ kg se pohybuje po kružnici o poloměru $r = 2$ m, přičemž jeho dráha závisí na čase podle vztahu $s = k\,t^3$, kde k = 0,005 m.s^{-3}. Určete velikost výsledné síly F působící na hmotný bod, úhel α, který svírá vektor síly s vektorem rychlosti, úhlovou rychlost ω a úhlové zrychlení ε v čase $t = 10$ s.

Řešení

Nejdříve určíme rychlost v, normálové, tečné a celkové zrychlení hmotného bodu jako

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 3k\,t^2,\;\; a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{9k^2t^4}{r},\; a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} - 6k\,t$$

Pro výslednou sílu, úhlovou rychlost a úhlové zrychlení hmotného bodu poté platí

$$F = m\,a = 11{,}6\ \mathrm{N}\,,\;\; \omega = \frac{v}{r} = \frac{3k\,t^2}{r} = 0{,}75\ \mathrm{s}^{-1},\;\; \varepsilon = \frac{a_t}{r} = \frac{6k\,t}{r} = 0{,}15\ \mathrm{s}^{-2}.$$

Úhel, který svírá směr výsledné síly se směrem rychlosti potom vypočteme ze vztahu

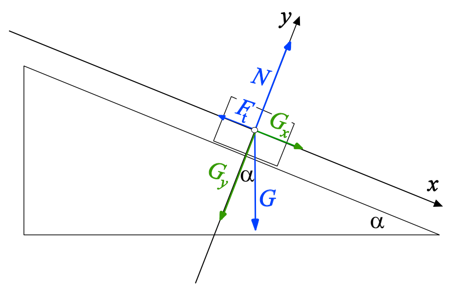
$$\cos\alpha = \frac{a_t}{a} = \frac{6r}{\sqrt{36r^2 + 81k^2t^6}} = 0{,}258\,,\ \alpha = 75^\circ 03'\,.$$

Obrácené řešení pohybové rovnice

Jestliže známe síly působící na těleso $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$, můžeme najít hodnoty kinematických veličin $\vec{a}, \vec{v}, \vec{r}$. Tato úloha je obráceným řešení pohybové rovnice.

Postup řešení:

1. Zvolíme inerciální nebo neinerciální souřadný systém.
2. Najdeme reálně působící síly $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ a jejich výslednici $\vec{F} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k$.
3. Pokud jsem zvolili neinerciální souřadný systém, k výslednici reálných sil připočítáme zdánlivé síly.
4. Zrychlení najdeme podílem $\vec{a} = \dfrac{\vec{F}}{m}$, souřadnice zrychlení $a_x = \dfrac{F_x}{m}$, $a_y = \dfrac{F_y}{m}$. $a_z = \dfrac{F_z}{m}$.
5. Tím jsme našli zrychlení a úlohu převedli na kinematický problém, který je řešen v Kinematice hmotného bodu, v odstavci **Přímočarý pohyb** a **Křivočarý pohyb**.



obr. 3 K příkladu nakloněná rovina

Příklad 1

Kvádr sklouzl dolů po nakloněné rovině dlouhé 5 m rovnoměrně zrychleným pohybem za 2 s. Součinitel smykového tření kvádru byl 0,35. Určete úhel sklonu nakloněné roviny vzhledem k vodorovné rovině.

Řešení 1

Tento příklad rozebereme podrobněji, protože jeho pochopení umožní vyřešit všechny příklady kurzu Fyzika, kde hledáme neznámý parametr pohybu na základě znalosti působících sil a opačně. Jde o silové řešení problému (na rozdíl od energetického řešení). Postup je následující:

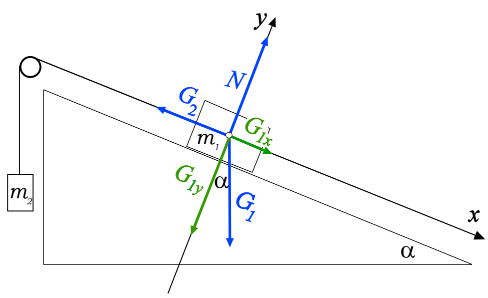
1. **Zavedení souřadného systému**: Na obr. 3 je souřadný systém zvolen tak, aby osa x byla totožná s směrem přímočarého pohybu těžiště tělesa,osa y bude kolmá k pohybu. Souřadný systém je v klidu a je tedy inerciální.
2. **Nalezení a vyjádření působících sil**: Modře zakreslené síly na obr. 3 jsou všechny reálné síly působící na těleso. Zeleně jsou zakreslené souřadnice gravitační síly, kterou jedinou musíme rozložit. Ostatní síly mají směr souřadných os. Takže souřadnicový zápis reálných sil je: $\vec{G} = (G\sin\alpha; -G\cos\alpha)$, $\vec{N} = (0; N)$, $\vec{F}_t = (-F_t; 0)$. Celková síla působící na těleso je vektorový součet reálných sil $\vec{F} = \vec{G} + \vec{F}_t + \vec{N}$. Souřadnice x celkové síly tedy bude $F_x = G\sin\alpha - F_t$, kde $N_x = 0$. Po dosazení za $G = mg$ a za

$F_t = \mu\, G_y = \mu\, m\, g \cos\alpha$ dostaneme $F_x = mg \sin\alpha - \mu\, m\, g \cos\alpha$.

3. **Sestavení pohybové rovnice**: Pohybovou rovnici stačí řešit ve směru pohybu, tedy ve směru osy x. V jiných směrech nenastává pohyb. Budeme tedy řešit pohybovou rovnici $F_x = mg \sin\alpha - \mu\, m\, g \cos\alpha = m\, a_x$.

4. **Nalezení závislosti zrychlení na sklonu**: Závislost zrychlení tělesa na nakloněné rovině na sklonu roviny získáme jednoduchou úpravou pohybové rovnice, dostaneme $a_x = g\,(\sin\alpha - \mu \cos\alpha)$. Totéž zrychlení získáme z kinetického zadání, když těleso urazí dráhu $x = 5$ m za $t = 2{,}5$ s, pomocí rovnice z kinematiky je souřadnice rovnoměrně zrychleného pohybu s nulovou počáteční rychlostí a nulovou počáteční polohou $x = \frac{1}{2} a_x\, t^2$, odkud $a_x = \frac{2x}{t^2} = 2{,}5$ m.s^{-2}.

5. **Porovnání zrychlení a nalezení výsledku**: Vyjdeme z $a_x = g \sin\alpha - \mu\, g \cos\alpha$, cos převedeme na sin úpravou $\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha}$ a dosazením známých hodnot $g = 9{,}81$ m.s^{-2}, $\mu = 0{,}35$, $a_x = 2{,}5$ m.s^{-2} dostaneme kvadratickou rovnici $1{,}12 \sin^2\alpha - 0{,}510 \sin\alpha - 0{,}058 = 0$. Kvadratická rovnice má kořeny $\sin\alpha = 0{,}548$ a $\sin\alpha = -0{,}094$. Zavrhneme záporný kořen, protože úhel nakloněné roviny není záporný, proto je výsledek $\alpha = 33{,}2^o$. Úhel sklonu nakloněné roviny vzhledem k vodorovné rovině je 33,2°.



obr. 4 K příkladu nakloněná rovina s kladkou

Příklad 2

Za jak dlouho ujede na nakloněné rovině vozík o hmotnosti 120 kg dráhu $s = 45$ m? Vozík je spojen se závažím hmotnosti 30 kg visícím přes kladku . Sklon nakloněné roviny je $\alpha = 30^o$ (obr. 4).

Řešení 2

Snažte se maximálně porovnat řešení příkladu 2 s řešením příkladu 1. Pokud najdete společné myšlenky, naučili jste se obrácené řešení pohybové rovnice.

1. **Zavedení souřadného systému**: Na obr. 4 je souřadný systém zvolen tak, aby osa x byla totožná s směrem přímočarého pohybu těžiště tělesa,osa y bude kolmá k pohybu. Souřadný systém je v klidu a je tedy inerciální.

2. **Nalezení a vyjádření působících sil**: Modře zakreslené síly na obr. 3 jsou všechny reálné síly působící na těleso. Zeleně jsou zakreslené souřadnice gravitační síly, kterou jedinou musíme rozložit. Ostatní síly mají směr souřadných os. Takže souřadnicový zápis reálných sil je: $\vec{G}_1 = (G_1 \sin\alpha; -G_1 \cos\alpha)$, $\vec{N} = (0; N)$, $\vec{G}_2 = (-G_2; 0)$. Celková síla působící na těleso je vektorový součet reálných sil $\vec{F} = \vec{G}_1 + \vec{G}_2 + \vec{N}$. Souřadnice x celkové síly tedy bude $F_x = G_1 \sin\alpha - G_2$, kde $N_x = 0$. Po dosazení za $G_1 = m_1 g$ a za $G_2 = m_2\, g$ dostaneme $F_x = m_1\, g \sin\alpha - m_2\, g$.

3. **Sestavení pohybové rovnice**: Pohybovou rovnici stačí řešit ve směru pohybu, tedy ve směru osy x. V jiných směrech nenastává pohyb. Obě tělesa se pohybuje jako jeden

systém o hmotnosti $m_1 + m_2$ se zrychlením a_x a rychlostí v_x. **Nesestavujeme tedy dvě pohybové rovnice, ale jednu**. Budeme řešit pohybovou rovnici $F_x = m_1 g \sin\alpha - m_2 g = (m_1 + m_2) a_x$.

4. **Nalezení závislosti zrychlení na čase**: Zrychlení tělesa na nakloněné rovině dostaneme úpravou poslední rovnice na $a_x = \dfrac{g(m_1 \sin\alpha - m_2)}{m_1 + m_2}$. Totéž zrychlení získáme z kinematiky z rovnoměrně zrychleného přímočarého pohybu s nulovou počáteční rychlostí a nulovou počáteční polohou $x = \dfrac{1}{2} a_x t^2 \Rightarrow a_x = \dfrac{2x}{t^2}$. Porovnáním $\dfrac{2x}{t^2} = \dfrac{g(m_1 \sin\alpha - m_2)}{m_1 + m_2}$ dostaneme výsledek $t = \sqrt{\dfrac{2x(m_1 + m_2)}{g(m_1 \sin\alpha - m_2)}}$. Dosazení numerických hodnot již proveďte sami.