HYDRODYNAMIKA

Obsah

Úvod

Hydrodynamika se zabývá prouděním kapalin a plynů. Podle časové závislosti rozdělujeme proudění na:

a) **neustálené proudění** (průtok i plocha průtočného průřezu jsou funkcemi času a dráhy)

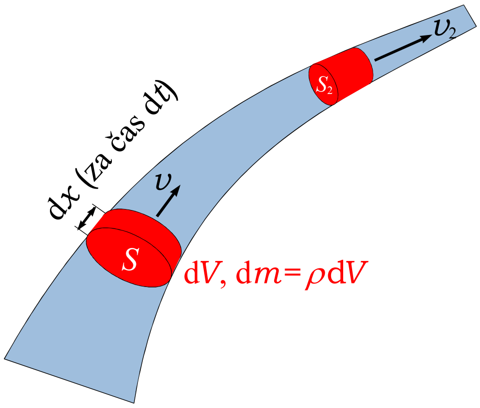
b) **ustálené proudění** (průtok je konstantní, nezávislý na čase a dráze), dále se dělí na:

- **rovnoměrné proudění** (rychlost i plocha průtočného průřezu jsou konstantní)
- **nerovnoměrné proudění** (rychlost i plocha průtočného průřezu jsou funkcemi dráhy)

Další text bude věnován **ustálenému proudění**.

Průtok kapaliny

U pohybujících se kapalin definujeme dva různé průtoky, **objemový průtok** a **hmotnostní průtok**.



obr. 1 Potrubí s proudící kapalinou

Objemový průtok kapaliny je definován jako objem kapaliny, který proteče zvoleným průřezem potrubí za jednu 1 s, tedy

$$Q_V = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}, \tag{1}$$

kde $\mathrm{d}V$ je objem elementu proudící kapaliny a $\mathrm{d}t$ je čas, za který urazí element proudící kapaliny dráhu $\mathrm{d}x$, jak ukazuje obr. 1.

Hmotnostní průtok kapaliny je definován jako hmotnost kapaliny, která proteče zvoleným průřezem potrubí za jednu 1 s, tedy

$$Q_m = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}, \tag{2}$$

kde $\mathrm{d}m$ je hmotnost elementu proudící kapaliny, jak ukazuje obr. 1. Oba průtoky spolu souvisí. Souvislost odvodíme jako $Q_m = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \frac{\rho\,\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \rho Q_V$, tedy

$$Q_m = \rho Q_V\,. \tag{3}$$

Objemový průtok v daném místě lze vyjádřit průřezem potrubí S a rychlostí proudění v. Zjistíme ho z definice objemového průtoku s využitím údajů na obr. 1,

$$Q_V = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{S\,\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = S\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = Sv\,.$$

Objemový průtok lze tedy vyjádřit rovnicí

$$Q_V = Sv\,. \tag{4}$$

Podobně, s využitím rovnice (3), hmotnostní průtok v daném místě potrubí lze vyjádřit průřezem potrubí S a rychlostí proudění v rovnicí

$$Q_m = \rho S v\,. \tag{5}$$

Rovnice kontinuity

Rovnice kontinuity říká, že hmotnostní průtok kapaliny v různých místech téhož nerozvětveného potrubí je stejný, tedy

$$Q_{m1} = Q_{m2}\,. \tag{6}$$

Dosadíme-li průtok z rovnice (5) dostaneme pro stlačitelnou kapalinu ($\rho_1 \neq \rho_2$) **rovnici kontinuity**

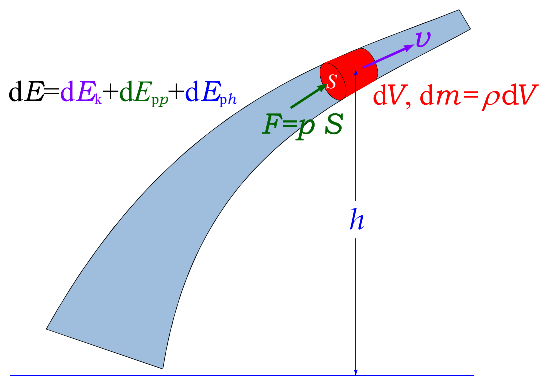
$$\rho_1 S_1 v_1 = \rho_2 S_2 v_2\,. \tag{7}$$

a podobně pro ideální nestlačitelnou kapalinu ($\rho_1 = \rho_2$)

$$S_1 v_1 = S_2 v_2\,. \tag{8}$$

Pro naše potřeby bude postačovat rovnice kontinuity (8) pro nestlačitelnou kapalinu.

Energie proudící kapaliny



obr. 2 K odvozeni energie proudící kapaliny

Element o objemu $\mathrm{d}V$ proudící kapaliny (obr. 2) má tři formy energie, **kinetickou** $\mathrm{d}E_\mathrm{k}$, **potenciální tlakovou** $\mathrm{d}E_{pp}$ a **potenciální výškovou** $\mathrm{d}E_{ph}$. Jeho energii tedy můžeme vyjádřit součtem

$$\mathrm{d}E = \mathrm{d}E_\mathrm{k} + \mathrm{d}E_{pp} + \mathrm{d}E_{ph}\,. \tag{9}$$

Jednotlivé členy rovnice (9) lze vyjádřit. První **člen kinetický (pohybový)** bude

$$\mathrm{d}E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}\mathrm{d}m v^2 = \frac{1}{2}\rho\,\mathrm{d}V v^2\,, \tag{10}$$

druhý **člen tlakový** zjistíme jako

$$\mathrm{d}E_{pp} = F\,\mathrm{d}x = pS\,\mathrm{d}x = p\,\mathrm{d}V \tag{11}$$

a třetí **člen výškový** bude

$$\mathrm{d}E_{ph} = \mathrm{d}m\,g\,h = \rho\,\mathrm{d}V g\,h\,. \tag{12}$$

Objemová hustota energie

U proudící kapaliny je výhodnější sledovat energii v jednotce objemu. Proto zavádíme **objemovou hustotu energie** w. Pro proudící kapalinu bude mít tvar

$$w = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}V} = \frac{1}{2}\rho v^2 + p + \rho g h\,. \tag{13}$$

Bernoulliho rovnice

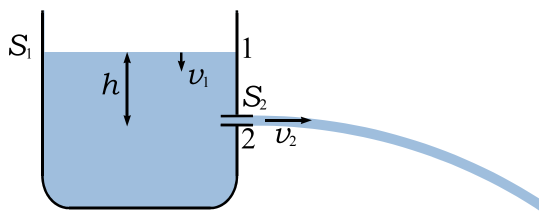
Vyjádříme zákon zachování energie pro proudění ideální kapaliny v potrubí. Splníme tedy podmínku $w = konst.$ S využitím rovnice (13) to bude

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + p + \rho g h = konst. \qquad (14)$$

Rovnice (14) se nazývá **Bernoulliho rovnice**.

Aplikace Bernoulliho rovnice

Mnoho aplikací lze řešit s využitím Bernoulliho rovnice. Je to např. určení rychlosti proudění užitím **Pitotovy trubice**, měření průtoku kapaliny **Venturiho vodoměrem**, měření bodové rychlosti a statického tlaku **Prandtlovou trubicí**, určení výtokové rychlosti z otvoru a jiné. Některé si ukážeme.



obr. 3 Výtok kapaliny otvorem

Výtok kapaliny otvorem

Z Bernoulliho rovnice lze určit rychlost kapaliny, která vytéká otvorem ve stěně nádoby v hloubce h pod hladinou kapaliny. Porovnáme kontinuitu proudění a energii proudící kapaliny u hladiny (index 1) a u otvoru (index 2). Z rovnice kontinuity dostaneme

$$S_1 v_1 = S_2 v_2 \qquad (15)$$

a z Bernoulliho rovnice

$$\frac{1}{2}\rho {v_1}^2 + \rho g h = \frac{1}{2}\rho {v_2}^2 . \qquad (16)$$

Jednoduchou úpravou získáme

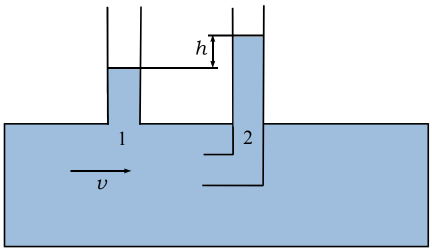
$$\frac{1}{2}({v_2}^2 - {v_1}^2) = g h .$$

Dosadíme-li za rychlost posuvu hladiny $v_1 = \frac{S_2}{S_1} v_2$ a zanedbáme $\frac{S_2^2}{S_1^2} << 1$, dostaneme **Torriceliho vzorec** pro výtokovou rychlost z otvoru ve stěně

$$v = v_2 = \sqrt{2gh} . \qquad (17)$$

Pitotova trubice

Pomocí **Pitotovy trubice** se určuje rychlost proudící kapaliny na základě rozdílu tlaků. Její schéma je na obr. 4. S využitím Bernoulliho rovnice najdeme rychlost proudění kapaliny. Kapalina má v místě ohnuté trubice (index 2) nulovou rychlost, zatímco u rovné trubice (index 1) má kapalina rychlost proudění. Svou energii si kapalina zachovává, proto bude platit



obr. 4 Pitotova trubice

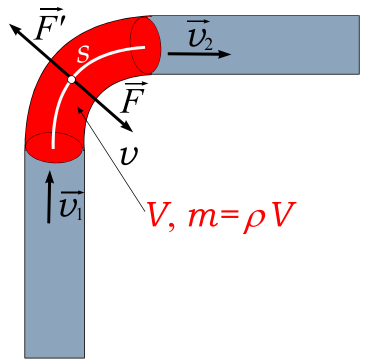
$$p_2 = \frac{1}{2}\rho v^2 + p_1 \qquad (18)$$

a odtud

$$v = \sqrt{\frac{2(p_2 - p_1)}{\rho}} = \sqrt{\frac{2\rho g h}{\rho}}\,, \qquad (19)$$

kde rozdíl tlaků jsme určili z rozdílu hladin v obou trubicích, $p_1 - p_2 = \rho g h$.

Dynamické účinky kapalin



obr. 5 Síla kapaliny při zakřivení potrubí

Pokud je kapalina donucena změnit svůj směr proudění, působí na okolí silou. Zjistíme velikost této síly v jednoduchých případech. K odvození působící síly použijeme větu o hybnosti, se kterou jsme se seznámili v dynamice hmotného bodu.

Věta o hybnosti kapaliny

Na červeně zakreslený objem proudící kapaliny na obr. 5 (dále jen vybraný objem kapaliny) působí při ustáleném toku kapaliny síla $\vec{F}$, která způsobí zakřivení proudu. Tato síla působí po dobu průtoku vybraného objemu kapaliny zakřivenou částí, tedy po dobu $t = \frac{v}{s}$, kde v je konstantní velikost rychlosti proudění (směr rychlosti konstantní není) a s je dráha, kterou kapalina urazí od začátku do konce zakřivení. Potom pro vybraný objem kapaliny platí věta o hybnosti

$$\vec{I} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)\,, \qquad (20)$$

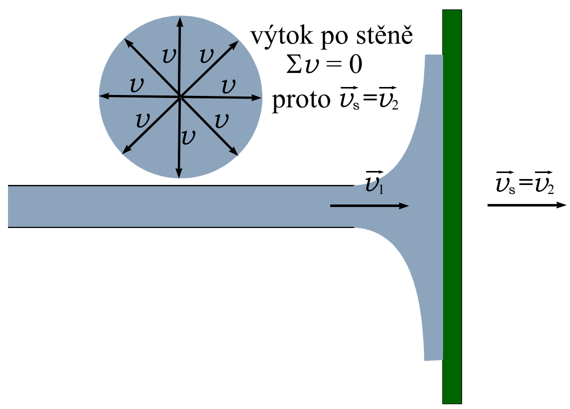
kde $\vec{p}_2$ a $\vec{p}_1$ jsou hybnosti vybraného objemu kapaliny na konci a začátku zakřivení. Za impuls síly $\vec{I}$ v rovnici (20) dosadíme z jeho definice $\vec{I} = \vec{F}\,t$ (platí pro $\vec{F} = konst.$) a rovnici upravíme

$$\vec{F} = \frac{m}{t}(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = Q_{\mathrm{m}}(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)\,. \qquad (21)$$

Rovnice (21) určuje sílu, která působí na vybraný objem kapaliny. My však hledáme její reakcí $\vec{F}' = -\vec{F}$, kterou působí kapalina na své okolí. Proto hledaná **síla kapaliny na své okolí** při zakřivení proudu bude

$$\vec{F}' = Q_{\mathrm{m}}(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)\,. \qquad (22)$$

Síla proudu kapaliny na stěnu



obr. 6 K výpočtu síly proudu kapaliny na rovinnou stěny

Rovinná stěna

Předpokládejme proud kapaliny vytékající rychlostí $\vec{v}_1$ kolmo na rovinnou stěnu, která se pohybuje rychlostí $\vec{v}_s$, jak zobrazuje obr. 6. Obě rychlosti mají vodorovný směr osy x. Znaménka rychlostí ve směru osy x budou kladná, proti směru osy x záporná. Odtokový proud kapaliny se po stěně kruhově rozteče rovnoměrně na všechny strany, tj. vektorový součet rychlostí ve směru stěny bude nula. Odtékající kapalina se tedy bude pohybovat pouze kolmo ke stěně a to jen tehdy, pokud bude stěna v pohybu. Vektor odtokové rychlostí tedy bude roven rychlosti stěny, $\vec{v}_2 = \vec{v}_\mathrm{s}$. Síla, kterou bude působit proudící kapalina na stěnu pak bude podle rovnice (22)

$$\vec{F}' = Q_\mathrm{m}(\vec{v}_1 - \vec{v}_s)\,, \tag{23}$$

kde rychlost stěny bude kladná při pohybu stěny na obr. 6 doprava a záporná, pokud se stěna pohybuje doleva.

Stěna tvaru duté polokoule

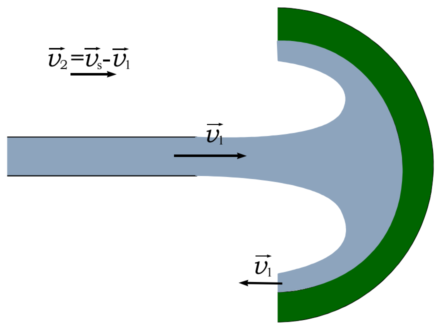
Naše zadání nyní pozměníme tak, že rovinnou stěnu zaměníme za stěnu ve tvaru duté polokoule. Nyní bude vektor odtokové rychlosti roven $\vec{v}_2 = \vec{v}_\mathrm{s} - \vec{v}_1$, jak ukazuje obr. 7. Síla, kterou bude působit proudící kapalina na stěnu nyní podle rovnice (22) bude

$$\vec{F}' = Q_\mathrm{m}\left[\vec{v}_1 - (\vec{v}_\mathrm{s} - \vec{v}_1)\right] = Q_\mathrm{m}(2\vec{v}_1 - \vec{v}_\mathrm{s})\,. \tag{24}$$

Rovněž zde bude rychlost stěny kladná při pohybu stěny na obr. 7 doprava a záporná, pokud se stěna pohybuje doleva. Síla na stěnu tvaru duté polokoule tedy bude

$$\frac{2v_1 - v_\mathrm{s}}{v_1 - v_\mathrm{s}} = \frac{v_1 - v_\mathrm{s}}{v_1 - v_\mathrm{s}} + \frac{v_1}{v_1 - v_\mathrm{s}} = 1 + \frac{v_1}{v_1 - v_\mathrm{s}}$$

krát větší než při působení na rovinnou stěnu.



obr. 7 K výpočtu síly proudu kapaliny na dutou kulovou stěnu