HYDROSTATIKA

Obsah

Struktura kapaliny

Kapaliny mají **amorfní strukturu**. Amorfní struktura spočívá v pravidelném uspořádání částic, které je omezeno na vzdálenost asi 10^{-8} m. Pro větší vzdálenosti je pravidelná struktura látky porušena. Kromě kapalin mají amorfní strukturu některé pevné látky (sklo, pryskyřice, vosk, asfalt, některé plasty).

V kapalinách se molekuly přitahují **van der Waalsovou** silou, jejíž dosah je jen asi 10-krát větší než je rozměr molekuly (pro vodu je rozměr molekuly asi 10^{-9} m). Následkem malého dosahu vytvoří mezimolekulární přitažlivé síly shluky částic. Shluk je uvnitř pravidelně uspořádán, přitažlivé síly zde dosáhnou a působí, avšak shluky vzájemně uspořádány nejsou a pohybují se náhodným **Brownovým pohybem**.

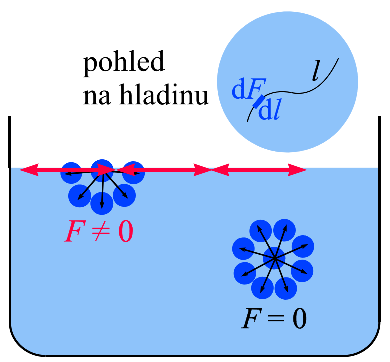
Následkem krátkého dosahu mezimolekulárních přitažlivých sil **kapaliny snadno mění svůj tvar**. V gravitačním poli jej přizpůsobují tvaru nádoby a vyplňují její spodní část. V prostoru bez gravitace a bez jiného silového pole zaujímají kapaliny tvar koule.

Povrchové napětí

Povrchové napětí je jev a zároveň fyzikální veličina. Povrch kapalin se chová jako elastická fólie a snaží se dosáhnout co možná nejmenších rozměrů. To znamená, že povrch kapaliny se snaží dosáhnout stavu s nejmenší energií. Čím větší je povrchové napětí, tím „kulatější“ je kapička kapaliny.

Proč vzniká povrchové napětí?

Sledujme silové chování molekuly kapaliny pod hladinou a na hladině kapaliny, jak ukazuje obr. 1. Uvnitř kapaliny působí přitažlivé síly sousedních molekul (van der Waalsovy síly) ze všech stran rovnoměrně a jejich účinek se vyruší, takže **uvnitř kapaliny jsou molekuly v silové rovnováze**. Molekula na povrchu však má sousední molekuly pouze pod hladinou, a proto na molekuly na povrchu kapaliny působí pouze přitažlivé síly od molekul pod hladinou kapaliny nebo na hladině. Výsledkem je síla působící na povrchové molekuly kapaliny a směřující pod hladinu. V důsledku této síly klesá tlak na povrchu kapaliny a na hladině se **ve směru hladiny** vytváří **povrchové napětí**. Povrchová vrstva se tedy chová jako pružná blána.

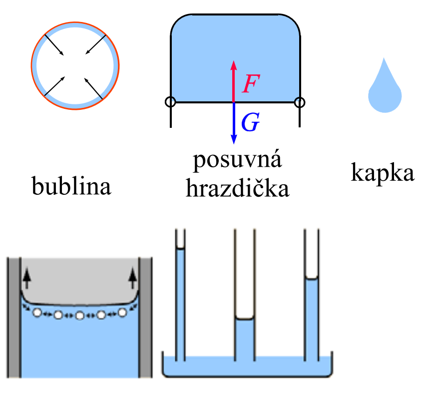


obr. 1 Vysvětlení vniku povrchového napětí

Pozor na chybnou interpretaci! Povrchové napětí působí ve směru povrchu, ne kolmo k povrchu!

Působí-li molekuly v libovolném řezu povrchovou vrstvou na délce dl tohoto řezu silou dF, (viz obr. 1), je **povrchové napětí** σ určeno rovnicí

$$\sigma = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}l}. \quad (1)$$



obr. 2 Příklady existence povrchového

Příklady existence povrchového napětí

Některé příklady existence povrchového napětí dokumentuje obr. 2.

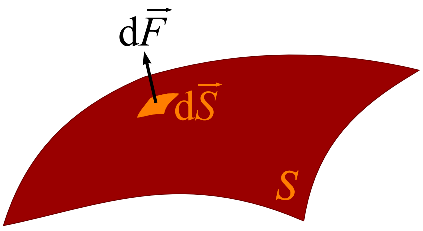
– **Bublina se udrží v kulovém tvaru**, protože povrchové napětí vytváří pružnou blánu.
– **Drátěný rámeček s posuvnou hrazdičkou** namočíme do mýdlového roztoku, po jeho vyjmutí se v rámečku vytvoří plochá mýdlová bublina. Povrchové síly v obou povrchových vrstvách bubliny se snaží zmenšit plochu bubliny a působí na hrazdičku silou, která je stejně velká jako gravitační síla působící na hrazdičku.
– V **tenké trubičce (kapiláře)** vystoupí hladina vody výše nežli je hladina vody v nádobě.
– V důsledku povrchového napětí má **malé množství vody v gravitačním poli tvar kapky**, ve stavu beztíže má **tvar koule**.

obr. 3 Vodoměrky na hladině

– **Stan nepropouští déšť**, přestože není vodotěsný. Průniku vody brání povrchová blána, která vznikla v důsledku povrchového napětí.
– **Jehla nebo žiletka mohou plavat na hladině vody**. Jestliže opatrně položíme jehlu na hladinu vody, jehla se na hladině udrží přestože její hustota je několikrát větší než hustota vody. Jestliže narušíme klidnou hladinu, jehla se potopí.
– Jak ukazuje obr. 3, podobně jako jehla **může na hladině vody plavat hmyz**. Na obr. 3 je pěkně vidět povrchová blána vody.

Tlak v kapalině

Tlak je skalární veličina. Je definován jako síla působící na jednotku plochy. Jednotkou tlaku je Pa = N.m^{-2} (pascal). Definici tlaku vysvětluje obr. 4. Pokud na elementární plošku $\mathrm{d}\vec{S}$ působí síla $\mathrm{d}\vec{F}$, tlak bude



obr. 4 K definici tlaku

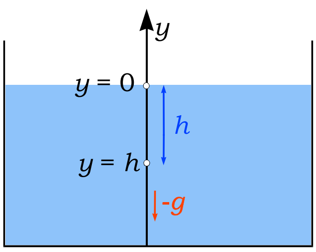
$$p = \frac{\mathrm{d}\vec{F}}{\mathrm{d}\vec{S}}, \tag{2}$$

Druhy tlaku v kapalinách

Tlak v kapalinách má dvě různé příčiny svého vzniku:

1. Pokud je příčinou tlaku výskyt kapaliny v silovém poli, např. v gravitačním poli, vniká v kapalině **vnitřní tlak** nebo také **hydrostatický tlak**.
2. Pokud je příčinou tlaku silové působení vnější síly na povrch kapaliny, např. pístem, vniká v kapalině **vnější tlak**.

O obou tlacích pojednáme samostatně.



obr. 5 K odvození gravitačního hydrostatického tlaku

Vnitřní (hydrostatický) tlak

Výpočet hydrostatického tlaku v kapalinách p_h určuje **Eulerova rovnice**

$$p_\mathrm{h} = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} \rho\,\vec{a}\,.\,\mathrm{d}\vec{r}\,. \tag{3}$$

V rovnici (3) je ρ hustota kapaliny a $\vec{a}$ je zrychlení silového pole, které je příčinou hydrostatického tlaku. Spodní integrační mez $\vec{r}_0$ je poloha nulového hydrostatického tlaku a $\vec{r}$ je poloha, ve které hydrostatický tlak určujeme.

Z Eulerovy rovnice určíme **gravitační hydrostatický tlak**. Rovnici (3) budeme řešit pro jednorozměrný případ ve směru osy y, jak ukazuje obr. 5., přičemž integrační meze budou $y_0 = 0$ a $y = h$. Dostaneme tlak v hloubce h pod hladinou kapaliny

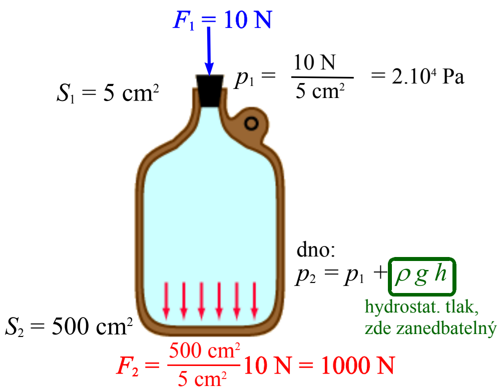
$$p_\mathrm{h} = \int_0^{-h} \rho(-g)\,\mathrm{d}y = -\rho g \int_0^{-h} \mathrm{d}y = \rho g h\,. \tag{4}$$

Vnější tlak a Pascalů zákon

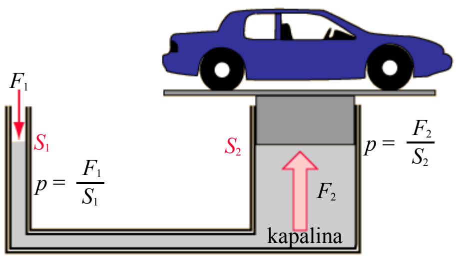
Vnější tlak je tlak způsobený **vnější silou** působící na povrch kapaliny. Vnější tlak můžeme např. vyvolat silovým působením pístu v uzavřené nádobě.

Pascalův zákon: Jestliže na kapalinu působí vnější tlaková síla, pak tlak v každém místě kapaliny vzroste o stejnou hodnotu. Vnější tlak v kapalině je v celém objemu kapaliny stejný.

Znamená to, že stejný vnější tlak bude pod zátkou na obr. 6 a stejný kdekoliv jinde v kapalině. Pozor, tlaky v kapalině se sčítají, proto k vnějšímu tlaku musíme v každém místě přičíst tlak hydrostatický. Takže například u dna na obr. 6 bude sčítán tlak vnější p_1 s tlakem hydrostatickým $\rho g h$.



obr. 6 Vnější tlak v termoforu



obr. 7 Využití vnějšího tlaku, hydraulický zvedák.

Pascalů zákon je využíván v **hydraulických strojích**. Pod pístem o ploše S_1 na obr. 7 bude stejný tlak, jako pod pístem o podstatně větší ploše S_2. Proto síla na píst 2 bude tolikrát větší než síla na píst 1, kolikrát větší je plocha pístu S_2 v poměru k ploše S_1. Na stejném principu pracují kapalinové brzdy automobilů, hydraulické jeřáby a bagry a další stroje a zařízení.

Tlaková síla

Síle, která vystupuje v definici tlaku (2), říkáme **tlaková síla**. Pokud hledáme tlakovou sílu působící na celou plochu S (obr. 4), zjistíme ji úpravou rovnice (2). Nejdříve rovnici upravíme na tvar $\mathrm{d}\vec{F} = p.\mathrm{d}\vec{S}$ a následně tuto rovnici integrujeme přes celou plochu S. Dostaneme tlakovou sílu

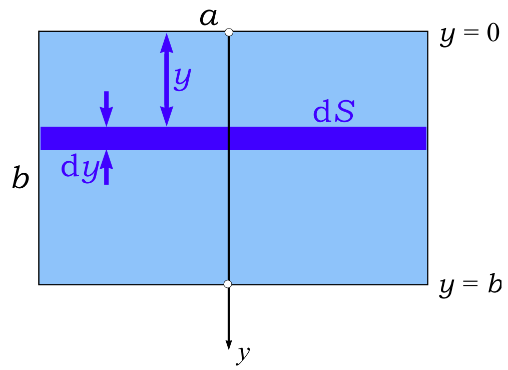
$$\vec{F} = \iint_S p.\mathrm{d}\vec{S}\,. \tag{5}$$

Integrál v rovnici (5) je plošný integrál.

Příklad: Tlaková síla na svislou hráz

a) Obdélníková hráz

Pomocí rovnice (5) lze spočítat celkovou tlakovou sílu působící na svislou obdélníkovou hráz zaplavenou po horní okraj vodou. K určení síly je rozhodující odvození elementární síly $\mathrm{d}F = p\,\mathrm{d}S$ působící na modře zakreslenou elementární plochu $\mathrm{d}S$ na obr. 8. Vzhledem k tomu, že elementární síla $\mathrm{d}F$ působí na plochu $\mathrm{d}S = a\,\mathrm{d}y$, v hloubce y, ve které je hydrostatický tlak $p = \rho\, g\, y$, bude hledaná síla



obr. 8 K výpočtu tlakové síly na svislou hráz

$$\mathrm{d}F = p\,\mathrm{d}S = \rho\, g\, a\, y\,\mathrm{d}y$$

a celková tlaková síla bude v souladu s rovnicí (5)

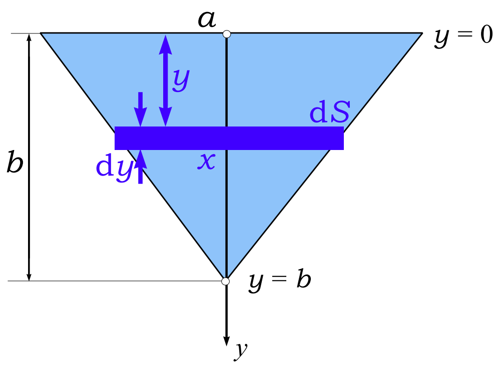
$$F = \int \mathrm{d}F = \int_0^b \rho\, g\, a\, y\,\mathrm{d}y = \rho\, g\, a \int_0^b y\,\mathrm{d}y = \underline{\underline{\frac{1}{2}\rho\, g\, a\, b^2}},$$

kde integrál $\int_0^b y\,\mathrm{d}y = \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^b = \frac{b^2}{2}$.

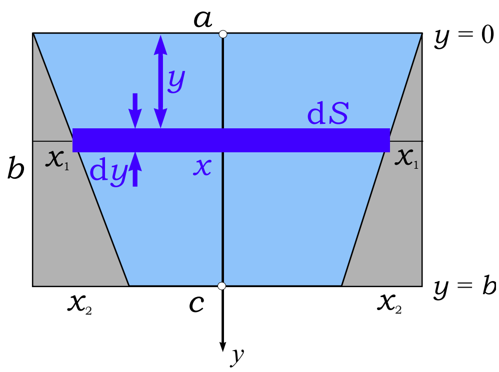
Řešte samostatně toto zadání pro trojúhelníkovou a potom pro lichoběžníkovou hráz.

b) Trojúhelníková hráz – úvod řešení

Ve srovnání s řešením tlakové síly na svislou obdélníkovou hráz je u jiného tvaru ten rozdíl, že musíme jinak vyjádřit velikost plochy $\mathrm{d}S = x\,\mathrm{d}y$, kde x nyní nebude konstantní, ale závisí na hloubce y. Tuto závislost najdeme z podobnosti trojúhelníků na obr. 9 rovnicí $\frac{x}{a} = \frac{b-y}{b}$. Proto bude hledané $x = a\frac{b-y}{b}$ a $\mathrm{d}S = a\frac{b-y}{b}\,\mathrm{d}y$. Dále už se postup řešení od obdélníkové hráze neliší.



obr. 9 K výpočtu tlakové síly na svislou trojúhelníkovou hráz



obr. 10 K výpočtu tlakové síly na svislou lichoběžníkovou hráz

c) Lichoběžníková hráz – úvod řešení

U lichoběžníkové svislé hráze je podobně jako u trojúhelníkové $\mathrm{d}S = x\,\mathrm{d}y$, kde x závisí na hloubce y. Šířku x najdeme tak, že od šířky hráze u hladiny odečteme dva doplňky x_1.

Doplněk x_1 najdeme z podobnosti šedých trojúhelníků na obr. 10 rovnicí $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y}{b}$, tedy $x_1 = x_2 \frac{y}{b}$. Proto bude hledaná šířka

$$x = a - 2x_1 = a - 2x_2 \frac{y}{b} = a - 2(\frac{a-c}{2})\frac{y}{b} = a - \frac{a-c}{b} y \text{ , kde } x_2 = \frac{a-c}{2}$$

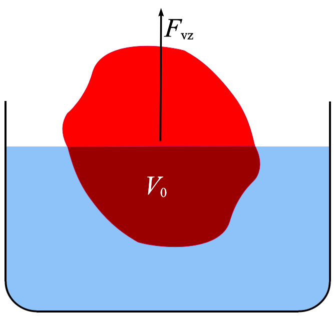
Takže $\mathrm{d}S = a \,\mathrm{d}y - \frac{a-c}{b} y \,\mathrm{d}y$. Dále už se postup řešení od obdélníkové hráze neliší.

Archimédův zákon

Archimédův zákon říká: **Těleso ponořené do kapaliny je nadlehčováno silou rovnající se tíze kapaliny stejného objemu jako je ponořená část tělesa.**

Síla, která nadlehčuje tělesa v kapalině, se nazývá **vztlaková síla**. Objem kapaliny vytlačené tělesem se rovná objemu ponořené části tělesa. Vztlakovou sílu lze pro homogenní tíhové pole a homogenní hustotu kapaliny tedy zapsat jako

$$F_{\mathrm{vz}} = \rho g V_0 , \qquad (6)$$



obr. 11 K Archimédově zákonu

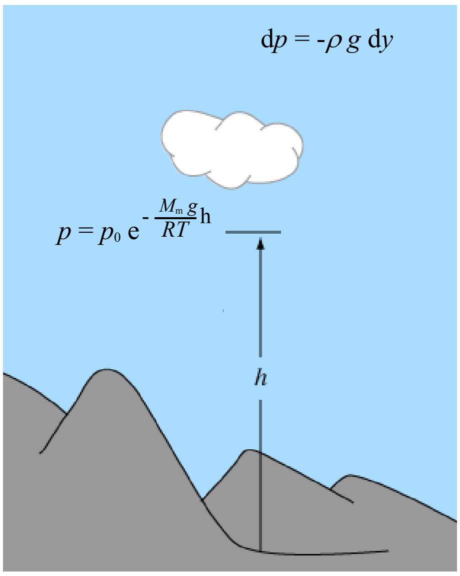
kde ρ je hustota kapaliny, g je tíhové zrychlení a V_0 je ponořená část objemu tělesa.

Archimédův zákon platí obdobně i pro plyny. Na principu vztlaku fungují například balóny a vzducholodě.

Pozor, nezaměňte! V rovnici (6) nezaměňte hustotu kapaliny s hustotou tělesa a k výpočtu použijte vždy jen objem ponořené části tělesa!

Atmosférický tlak

Atmosférický tlak je hydrostatický tlak ve vzduchu nad povrchem Země. Určíme jej z Eulerovy rovnice (3) v diferenciálním tvaru pro jednorozměrný případ (ve směru osy y)



obr. 12 K odvození atmosférického tlaku

$$\mathrm{d}p = \rho(-g)\mathrm{d}y , \qquad (7)$$

kde ρ je výškově závislá hustota vzduchu.

Závislost hustoty vzduchu na výšce určíme ze stavové rovnice, kterou známe z termiky

$$\frac{pV}{R} = \frac{m}{M} T .$$

Jednoduchou úpravou dostaneme hustotu

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{p M_{\mathrm{m}}}{RT} , \tag{8}$$

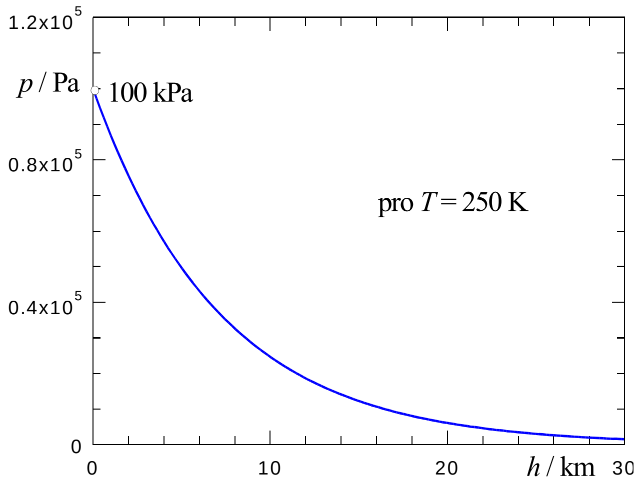
kde M_{m} je molární hmotnost vzduchu (pro suchý vzduch $M_{\mathrm{m}} = 0{,}029\ \mathrm{kg.mol^{-1}}$) a R je molární plynová konstanta. Teplota T zde vystupuje v kelvinech. Rovnici (8) dosadíme do rovnice (7), upravíme a provedeme integraci,

$$\mathrm{d}p = \rho(-g)\,\mathrm{d}y = -\frac{M_{\mathrm{m}}}{RT} g\, p\, \mathrm{d}y ,$$

úpravou $\frac{\mathrm{d}p}{p} = -\frac{M_{\mathrm{m}}}{RT} g\, \mathrm{d}y$ a odsud

$$\int_{p_0}^{p} \frac{\mathrm{d}p}{p} = -\frac{M_{\mathrm{m}}}{RT} g \int_0^h \mathrm{d}y .$$

Spodní integrační meze odpovídají $y = 0$ na povrchu Země (u hladiny moře), horní integrační meze odpovídají výšce h nad hladinou moře. Integrací dostaneme výškovou závislost atmosférického tlaku



obr. 13 Graf závislosti atmosférického tlaku na výšce

$$p = p_0\, \mathrm{e}^{-Kh} , \tag{9}$$

kde $K = \frac{M_{\mathrm{m}} g}{RT}$. V rovnici (9) je p_0 atmosférický tlak při hladině moře, M_{m} je molární hmotnost vzduchu, R je molární plynová konstanta, T je teplota vzduchu ve výšce h, g je gravitační zrychlení a h je výška nad mořem. Graficky je rovnice (9) znázorněna na obr. 13.

Poznámka: Uvědomte si, že modelový výpočet pomocí rovnice (9) předpokládá stejnou teplotu v různých výškách atmosféry. To však není v reálné atmosféře splněno, protože teplota s výškou klesá. Modelový výpočet nadhodnocuje tlak v dané výšce h.