Kinematika hmotného bodu

Obsah

Klasická mechanika

Klasická mechanika (dále jen mechanika) studuje mechanický pohyb. Kinematika se zabývá jeho popisem v prostoru a v čase a dynamika studuje příčiny pohybu.

Mechanický pohyb je změna vzájemné polohy těles v prostoru a v čase. Klasická mechanika splňuje podmínku, že rychlosti těles jsou mnohem menší než rychlost světla ve vakuu $c = 3.10^8\ \mathrm{m.s^{-1}}$.

MECHANIKA
- → KINEMATIKA - popis v prostoru a čase bez uvažování příčin pohybu a jeho změn
- → DYNAMIKA - studium příčin pohybu a jeho změn
- → STATIKA - zvláštní část mechaniky, pohyb nenastává

Hmotný bod je těleso nenulové hmotnosti, jehož geometrické rozměry jsou zanedbatelně malé.

Vztažný systém

Pohyb je relativní, a proto je nutno zavést vztažný systém (vztažnou soustavu). Se vztažným systémem spojíme pohyb tělesa. Nejznámější vztažný systém je pravoúhlý souřadný systém (kartézský), který je znázorněn na obr. 1.

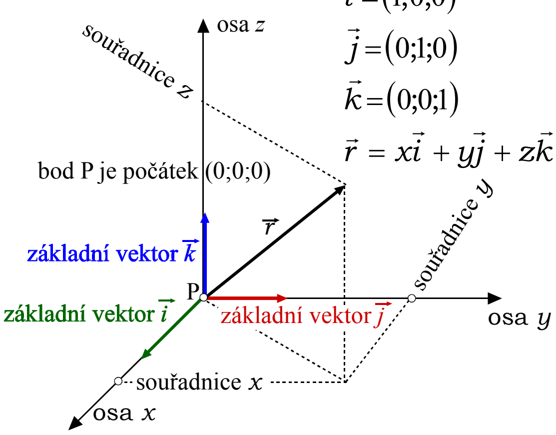
Polohový vektor

Polohový vektor určuje polohu bodu. Jeho počáteční bod leží v počátku souřadné soustavy a jeho koncový bod splývá s polohou, kterou určuje.

Velikost polohového vektoru je (všimněte si značení)

$$|\vec{r}| = r = \sqrt[2]{x^2 + y^2 + z^2}\ . \tag{1}$$

$$\vec{i} = (1;0;0)$$
$$\vec{j} = (0;1;0)$$
$$\vec{k} = (0;0;1)$$
$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$



obr. 1 Kartézský souřadný systém

Jednotkový polohový vektor je definován poměrem

$$\vec{r}_0 = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}\ . \tag{2}$$

Jeho velikost je jedna a je bezrozměrný.

Trajektorie

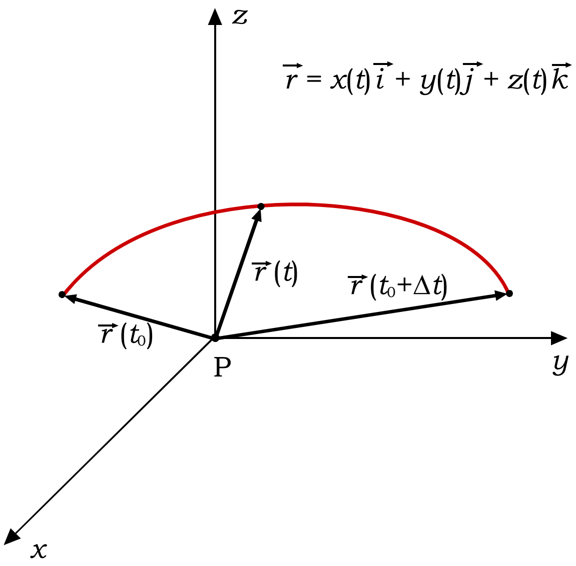
Množina koncových bodů polohového vektoru $\vec{r} = \vec{r}(t)$ je trajektorie. Je to křivka, po které se hmotný bod pohybuje.

Parametrické rovnice trajektorie

Časová závislost polohového vektoru je vektorová rovnice popisující křivku v prostoru.

$$\vec{r} = f(t) = [x(t);\ y(t);\ z(t)]\,. \tag{3}$$

Každá souřadnice vektorové funkce představuje jednu parametrickou rovnici trajektorie.



obr. 2 Trajektorie v souřadné soustavě

Trajektorie je nakreslená na obr. 2. Každý polohový vektor, určující trajektorii, začíná v počátku souřadnic a končí na trajektorii. Vektor $\vec{r}\,(t_0)$ určuje polohu počátku trajektorie, vektor $\vec{r}\,(t_0 + \Delta t)$ určuje konec trajektorie, obecný bod na trajektorii je určen vektorem $\vec{r}\,(t)$. Množina všech koncových bodů polohových vektorů je trajektorie.

Příklad 1

Je dán polohový vektor $\vec{r} = (12;\ -5;\ 0)$ cm. Jaká je jeho velikost?

$$|\vec{r}| = \sqrt{(12)^2 + (-5)^2}$$

$$|\vec{r}| = \sqrt{169} = 13 \text{ cm}$$

Velikost zadaného vektoru je 13 cm.

Příklad 2

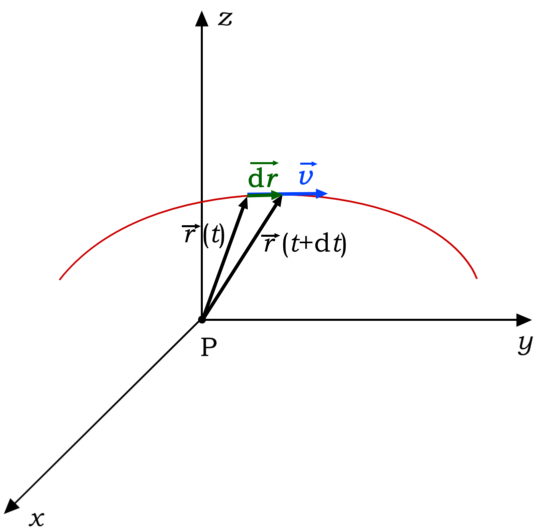
Jaká je velikost základních vektorů?

$$i = |\vec{i}| = \sqrt{1^2 + 0 + 0} = 1,$$

$$j = |\vec{j}| = \sqrt{0 + 1^2 + 0} = 1,$$

$$k = |\vec{k}| = \sqrt{0 + 0 + 1^2} = 1.$$

Základní vektory jsou jednotkové.



obr. 3 K vysvětlení definice rychlosti

Rychlost

Okamžitá rychlost je dána změnou polohy za jednotku času. Určuje ji rovnice (je definována)

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\,\vec{r}}{\mathrm{d}\,t}\,. \tag{4}$$

Jednotka rychlosti je m.s^{-1}. Rovnici (4) čteme takto: **rychlost je derivace polohového vektoru podle času**. Okamžitá rychlost **má tečný směr k trajektorii**. Rovnice (4) představuje 3 složkové rovnice.

$$v_x = \frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t}\,,\quad v_y = \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t}\,,\quad v_z = \frac{\mathrm{d}\,z}{\mathrm{d}\,t}\,. \tag{5}$$

Velikost rychlosti se zjišťuje jako velikost vektoru, tedy

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \frac{\sqrt{\mathrm{d}\,x^2 + \mathrm{d}\,y^2 + \mathrm{d}\,z^2}}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}\,s}{\mathrm{d}\,t}\,, \tag{6}$$

kde s je délka dráhy. Derivací délky dráhy nezjistíme směr rychlosti, zjistíme jen velikost rychlosti.

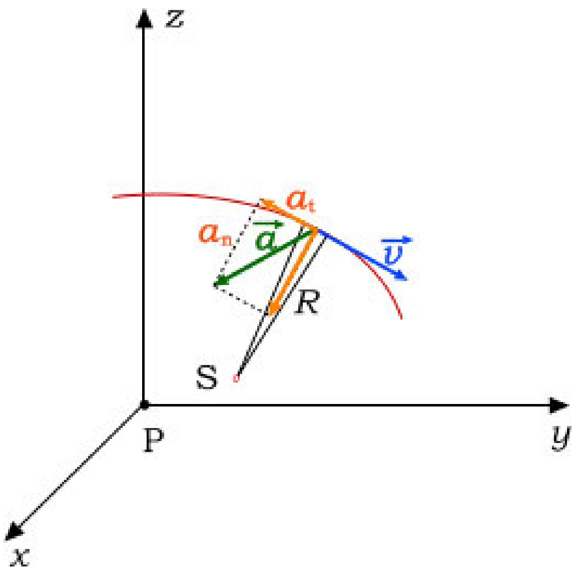
Zrychlení

Okamžité zrychlení je dáno změnou vektoru rychlosti za jednotku času. Určuje ho rovnice (zrychlení je definováno)

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\,\vec{v}}{\mathrm{d}\,t}\,. \tag{7}$$

Jednotka zrychlení je m.s^{-2}. Rovnici (7) čteme takto: **zrychlení je derivace vektoru rychlosti podle času**. Okamžité zrychlení **nemá obecně směr vázaný k trajektorii**. Rovnice (7) představuje 3 složkové rovnice, podobně jako je tomu u rychlosti v rovnici (5).

Tečné a normálové zrychlení



obr. 4 K vysvětlení definice zrychlení

Zrychlení často rozkládáme na tečnou $\vec{a}_t$ a normálovou $\vec{a}_n$ složku zrychlení

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n\,. \tag{8}$$

Tečná složka zrychlení má směr tečny a normálová směr normály (kolmice) k trajektorii. Velikost těchto složek je

$$a_t = \frac{\mathrm{d}\,v}{\mathrm{d}\,t}\,,\quad a_n = \frac{v^2}{R}\,, \tag{9}$$

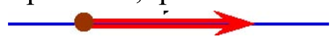
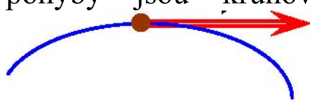
kde v je velikost rychlosti a R je poloměr křivosti trajektorie, obojí v místě rozkladu vektoru zrychlení, jak ukazuje obr. 4.

Velikost zrychlení se zjišťuje jako velikost vektoru nebo z tečné a normálové složky zrychlení

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}\,. \tag{10}$$

Klasifikace pohybů

Pohyby lze klasifikovat zejména 1) podle tvaru dráhy a 2) podle charakteru rychlosti.

Podle tvaru dráhy	**Přímočarý** - vektor v má stále stejný směr, který splývá s přímkou, po níž se hmotný bod pohybuje. 
	Křivočarý - vektor $\vec{v}$ mění svůj směr, který je vždy tečný ke křivce, po níž se hmotný bod pohybuje. Speciálními křivočarými pohyby jsou kruhový pohyb a vrhy. 
Podle charakteru rychlosti	**Nerovnoměrný** - vektor rychlosti svou velikost mění, $v \neq konst.$ Speciálním nerovnoměrným pohybem je pohyb rovnoměrně zrychlený.
	Rovnoměrný - vektor rychlosti má stále stejnou velikost $v = konst.$

Některé z uvedených pohybů si popíšeme.

Přímočarý pohyb

Dráhou přímočarého pohybu je přímka. Proto stačí popis v souřadné soustavě s jedinou osou x. Pohyb tedy stačí popsat veličinami $x = s, v_x = v, a_x = a$. Rychlost přímočarého pohybu odvodíme z definiční rovnice zrychleni (7), stačí ji napsat pro směr x.

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \mathrm{d}v = a\,\mathrm{d}t \Rightarrow \int_{v_0}^{v} \mathrm{d}v = \int_0^t a\,\mathrm{d}t \Rightarrow v - v_0 = \int_0^t a\,\mathrm{d}t. \tag{11}$$

Dále budeme pokračovat pro **pohyb rovnoměrně zrychlený**, splňující podmínku $a = konst.$

$$v = \int_0^t a\,\mathrm{d}t + v_0 = a\int_0^t \mathrm{d}t + v_0 = at + v_0. \tag{12}$$

Rychlost přímočarého pohybu rovnoměrně zrychleného je tedy dána rovnicí

$$v = v_0 + at. \tag{13}$$

Polohu přímočarého pohybu na ose x, tedy x souřadnici, odvodíme z definiční rovnice rychlosti (4), stačí ji napsat pro směr x.

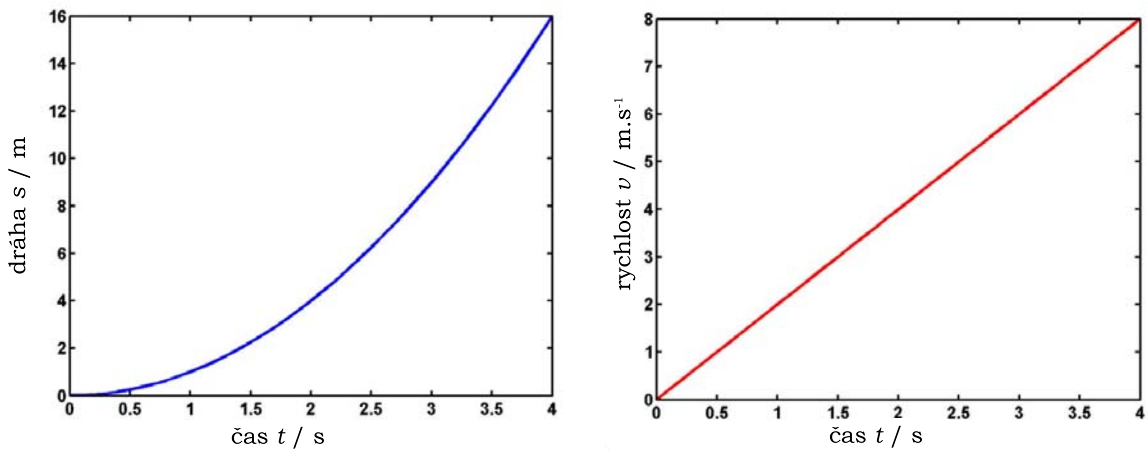
$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \mathrm{d}x = v\,\mathrm{d}t \Rightarrow \int_{x_0}^{x} \mathrm{d}x = \int_0^t v\,\mathrm{d}t \Rightarrow x - x_0 = \int_0^t v\,\mathrm{d}t. \tag{14}$$

Dále budeme opět pokračovat pro **pohyb rovnoměrně zrychlený**, splňující rovnici (13) a podmínku $a = konst.$

$$x = \int_0^t (v_0 + at)dt + x_0 = v_0\int_0^t \mathrm{d}t + a\int_0^t t\,\mathrm{d}t + x_0 = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2. \tag{15}$$

Délka dráhy přímočarého pohybu rovnoměrně zrychleného je tedy dána rovnicí

$$s = x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 . \tag{16}$$



obr. 5 Časová závislost dráhy a rychlosti rovnoměrně zrychleného přímočarého pohybu

Křivočarý pohyb

Ke křivočarému pohybu už musíme obecně použít vektorový popis. Bez odvození napišme, že pro popis obecného křivočarého pohybu v prostoru platí analogické rovnice jako v předchozím odstavci s tím rozdílem, že k popisu použijeme vektory. Bude tedy platit následující sestava rovnic (méně používané nejsou zvýrazněné).

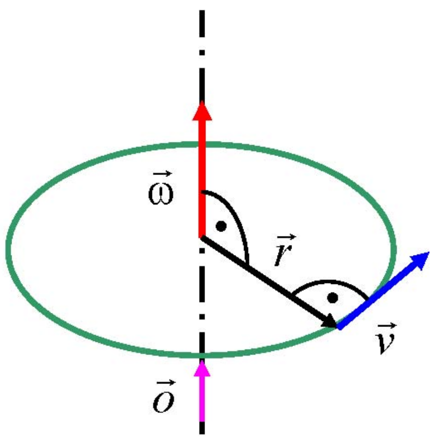
Pro pohyb s obecným zrychlením:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \int_0^t \vec{a}\, \mathrm{d}\, t . \tag{17}$$

Pro pohyb **rovnoměrně zrychlený** s konstantním zrychlením:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a} t , \tag{18}$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2 . \tag{19}$$

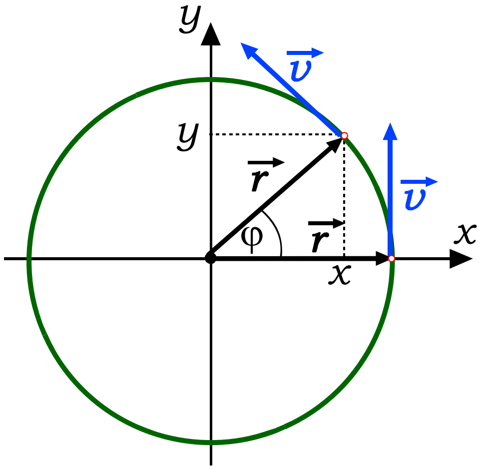


obr. 6 Znázornění kruhového pohybu v prostoru

Kruhový pohyb

Kruhový pohyb je speciální případ křivočarého pohyby. Probíhá v rovině po kruhové trajektorii, a proto k jeho popisu stačí souřadný systém s osami x, y. Kruhový pohyb znázorněný v prostoru je na obr. 4, znázorněný v rovině je na obr. 7.

Kruhový pohyb se nejvýhodněji popisuje kruhovými veličinami, které zavedeme.



obr. 7 Znázornění kruhového pohybu v rovině

Úhlová dráha

představuje úhel φ, který svírá průvodič (polohový vektor) pohybujícího se bodu s osou x. Úhlová dráha narůstá při každé provedené otáčce o 2π a může tedy dosáhnout libovolně vysokých hodnot.

Souřadnice při kruhovém pohybu

S využitím úhlové dráhy a obr. 7 lehce nejdeme souřadnice hmotného bodu pohybujícího se po kružnici. Souřadnice jsou

$$x = r\cos\varphi\,,\qquad y = r\sin\varphi\,. \tag{20}$$

Pokud za úhlovou dráhu dosadíme některé z níže uvedených vyjádření úhlové dráhy, získáme časovou závislost souřadnic.

Úhlová rychlost

je definována rovnicí

$$\vec{\omega} = \frac{\mathrm{d}\vec{\varphi}}{\mathrm{d}t}\,, \tag{21}$$

Úhlové zrychlení

je definováno rovnicí

$$\vec{\varepsilon} = \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}\,, \tag{22}$$

Definice uvedené v rovnicích (21) a (22) jsou velmi podobné k definicím obecného pohybu (4) a (7).

Vektorový popis kruhového pohybu není obvykle nutný, protože všechny vektory $\vec{\varphi}, \vec{\omega}, \vec{\varepsilon}$ jsou souběžné a leží v ose rotace, jak naznačuje obr. 6, kde je zakreslen vektor úhlové rychlosti $\vec{\omega}$. Na obr. 6 je rovněž vidět, že vektory $\vec{r}, \vec{\omega}, \vec{v}$ jsou vzájemně kolmé. Dále již nebudeme vektorový popis používat.

Řešením rovnic (21) a (22), stejným postupem jako u přímočarého pohybu, dostaneme základní rovnice popisující časové závislosti úhlové rychlosti a úhlové dráhy. Předpokládejme rovnoměrně zrychlený kruhová pohyb, $\varepsilon = konst.$, potom

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t\,, \tag{23}$$

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\varepsilon t^2\,. \tag{24}$$

Souvislost obvodových a úhlových veličin

Obvodovými veličinami kruhového pohybu jsou obvodová dráha s, obvodová rychlost v, a obvodové zrychlení a. Úhlovými veličinami jsou $\varphi, \omega, \varepsilon$. Mezi nimi lze najít následující jednoduché souvislosti

$$s = \varphi r \,, \tag{25}$$

$$v = \omega r \,, \tag{26}$$

$$a = \varepsilon r \,. \tag{27}$$

Perioda, frekvence, kruhová frekvence

U periodických pohybů, ke kterým pohyb kruhový patří, zavádíme následující veličiny. **Perioda** kruhového pohybu T je čas potřebný k vykonání jedné otáčky. **Frekvence** kruhového pohybu f je počet oběhů za 1 sekundu.

$$f = \frac{1}{T} \,. \tag{28}$$

Kruhová frekvence je rovna **úhlové rychlosti**. Její závislost na frekvenci najdeme takto. Využijeme toho, že úhlová dráha se po jedné otáčce zvýší o 2π a čas o periodu T.

$$\left.\begin{aligned} \varphi(t_0) &= 0 \\ \varphi(t_0 + T) &= 2\pi \end{aligned}\right\} \Rightarrow \varphi(t_0 + T) = \varphi(t_0) + \omega\, T \,, \tag{29}$$

odtud získáme

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \,. \tag{30}$$