MECHANICKE KMITY

Obsah

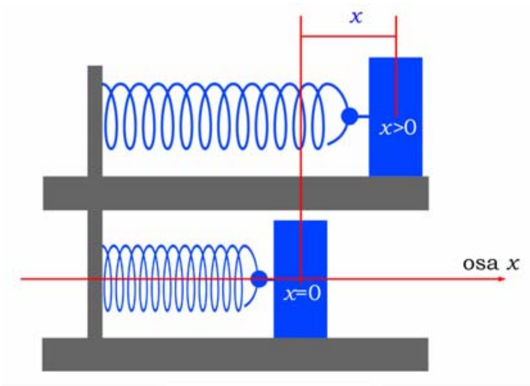
Úvod 2
Základní pojmy mechanického kmitání 2
Rozdělení kmitů podle působící síly 2
Volné harmonické kmity 3
Dynamický popis volných kmitů 3
Kinetický popis volných kmitů 3
Efektivní hodnoty výchylky, rychlosti a zrychlení oscilátoru 4
Energie volných kmitů 5
Tlumené kmity 6
Pohybová rovnice 6
Výchylka tlumených kmitů 7
Útlum a logaritmický dekrement útlumu 7
Nucené kmity 8
Rezonance 8

Úvod

Mechanické kmity jsou speciálním případem obecného mechanického pohybu hmotného bodu, při kterém se tento bod pohybuje v omezené oblasti kolem **rovnovážné polohy**. Rovnovážná poloha je místo stabilní rovnováhy, ve kterém na hmotný bod nepůsobí žádná výsledná síla. Do rovnovážné polohy klademe pokud možno počátek soustavy souřadnic. Potom polohový vektor hmotného bodu je současně jeho výchylkou z rovnovážné polohy.

Opakují-li se kmity pravidelně, tj. opakují-li se všechny fyzikální veličiny charakterizující kmitavý pohyb (poloha, rychlost, zrychlení), jedná se o **periodické** nebo také **harmonické kmity**. Hmotný bod, který mechanické kmity koná, se nazývá **oscilátor**.

Základní pojmy mechanického kmitání



obr. 1 Těleso spojené s pružinou na dokonale hladké podložce. Dole v rovnováze a nahoře vychýlené.

Pokud na oscilátor nepůsobí žádná síla, je v **rovnovážná poloze**. Vzdálenost od rovnovážné polohy je **výchylka** x, výchylka v rovnovážné poloze je tedy $x = 0$. Maximální výchylka je **amplituda** A.

Nejmenší časový úsek, po jehož uplynutí nabývá výchylka periodického kmitavého pohybu znovu stejné hodnoty, se nazývá **doba kmitu** T nebo stručně **perioda**. Převrácenou hodnotou periody je **frekvence** (kmitočet) f periodického kmitavého pohybu udávající počet kmitů, jež proběhnou za jednu sekundu. Fyzikální jednotkou frekvence je hertz, značka Hz. Pro frekvenci a periodu platí vzájemný vztah

$$f = \frac{1}{T}. \tag{1}$$

Pro popis periodických pohybů se zavádí ještě **úhlová frekvence**, která je 2π násobkem frekvence, tedy

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}. \tag{2}$$

Významnou veličinou pro popis kmitů je **fáze** φ. Udává informaci v jakém stavu se oscilátor právě nachází a vyjadřuje se rovnicí

$$\varphi(t) = \omega t + \varphi_0 , \tag{3}$$

kde t je čas trvání kmitavého pohybu a φ_0 je **počáteční fáze** v čase $t = 0$.

Rozdělení kmitů podle působící síly

Příčinou každého pohybu je síla. Příčinou kmitavého pohybu je **direktivní** (**elastická**) **síla**. Bez této síly mechanické kmity nevzniknou. O této síle se později zmíníme podrobněji.

Pokud na oscilátor působí **jen direktivní síla**, vzniknou **volné kmity**. Amplituda volných kmitů je konstantní, volné kmity probíhají přesně periodicky.

Pokud na oscilátor působí **kromě direktivní síly ještě tlumící síla** a již žádná jiná, vzniknou

tlumené kmity. Tlumící silou může být tření, odpor prostředí aj. Tlumené kmity jsou kvazi-periodické (téměř periodické), amplituda klesá s časem. Po dostatečně dlouhé době je amplituda nulová a kmity zaniknou.

Pokud na oscilátor působí **kromě direktivní a tlumící síly ještě vnější budící síla**, vzniknou **vynucené kmity**, jejichž frekvence se po krátké době přizpůsobí frekvenci budící síly. Jejich amplituda závisí na frekvenci volných kmitů a budící frekvenci.

Volné harmonické kmity

Nyní se věnujme kmitům, které vzniknou působením jen direktivní síly, tedy volným kmitům.

Dynamický popis volných kmitů

Direktivní síla je síla přímo úměrná výchylce oscilátoru, která má opačný směr než výchylka

$$F_\mathrm{d} = -k\,x\,. \tag{4}$$

Direktivní síla je vždy orientována opačně než výchylka, směřuje tedy vždy do rovnovážné polohy. Konstanta k se nazývá **tuhost oscilátoru**. U pružiny se tato konstanta nazývá **tuhost pružiny**.

Podle Newtonovy pohybové rovnice $F_\mathrm{d} = m\,a$ způsobí síla F_d pohyb oscilátoru o hmotnosti m se zrychlením a, v našem případě to tedy bude $-k\,x = m\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}$. Úpravou získáme **diferenciální pohybovou rovnici volného oscilátoru**

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k}{m}x = 0\,. \tag{5}$$

Kinetický popis volných kmitů

Najdeme kinetické veličiny volných kmitů, tedy výchylku (ta tu zastupuje polohu), rychlost a zrychlení oscilátoru.

Řešením diferenciální rovnice (5) je získání závislosti výchylky na čase $x(t)$. Řešení se budete učit v matematice, až tuto metodu zvládnete zjistíte, že řešení je $x = K\sin(\sqrt{\dfrac{k}{m}}\,t + \varphi_0)$. Porovnáním s rovnicí (3) pro fázi a s přihlédnutím, že maximální hodnota funkce sin je 1, získáme časovou rovnici pro **výchylku volných kmitů**

$$x = A\sin(\omega t + \varphi_0)\,, \tag{6}$$

kde $(\omega t + \varphi_0)$ je fáze a

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{7}$$

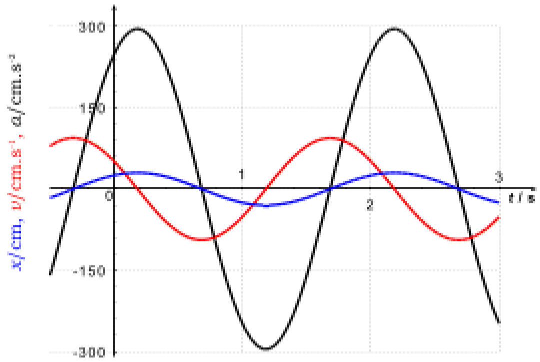
je úhlová frekvence volného kmitavého pohybu. Rovnice (7) umožňuje zjišťovat frekvenci kmitů $f = \dfrac{\omega}{2\pi}$ z tuhosti a hmotnosti oscilátoru. **Rychlost oscilátoru** dostaneme derivací výchylky podle času

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \omega A \cos(\omega t + \varphi_0) \tag{8}$$

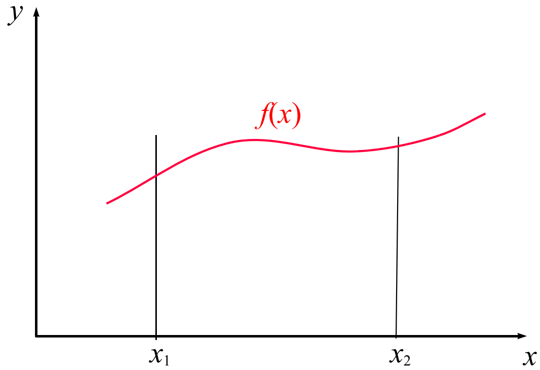
kde $v_{max} = \omega A$ je maximální rychlost oscilátoru. Oscilátor ji dosáhne v rovnovážné poloze, kde $\cos(\omega t - \varphi_0) = 1$. Je-li výchylka volného oscilátoru nulová, je jeho rychlost maximální. Zrychlení oscilátoru dostaneme derivací rychlosti podle času, derivujme tedy rovnici (8)

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\omega^2 A \sin(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 x \tag{9}$$

kde $a_{max} = \omega^2 A$. Výchylka, rychlost a zrychlení oscilátoru jsou periodické časové funkce. Někdy je výhodné zjednodušit popis volných kmitů zavedením jejich **efektivních hodnot**.



obr. 2 Časová závislost výchylky, rychlosti, zrychlení volného oscilátoru



obr. 3 K definici efektivní hodnoty funkce

Efektivní hodnoty výchylky, rychlosti a zrychlení oscilátoru

Efektivní hodnotu y_{ef} lze zavést pro libovolnou funkci $y = f(x)$. Zavádíme ji na intervalu nezávisle proměnné $x \in \langle x_1, x_2 \rangle$ rovnicí

$$y_{\text{ef}}^2 = \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} f^2(x)\, \mathrm{d}x \tag{10}$$

Pokud tedy chceme zavést efektivní hodnotu výchylky $x = f(t)$, dosadíme rovnici (6) do rovnice (10) pro $t \in \langle 0, T \rangle$

$$x_{\text{ef}}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T A^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0)\, \mathrm{d}t\,. \tag{11}$$

A opět tu máme matematický problém. Vyřešením integrálu (11) dostaneme **efektivní výchylku** volného oscilátoru

$$x_{\text{ef}} = \frac{A}{\sqrt{2}}\,. \tag{12}$$

Podobně postupujeme pro rychlost a zrychlení oscilátoru. Dostaneme **efektivní rychlost** volného oscilátoru

$$v_{\text{ef}} = \frac{\omega A}{\sqrt{2}} \tag{13}$$

a **efektivní zrychleni** volného oscilátoru

$$a_{\mathrm{ef}} = \frac{\omega^2 A}{\sqrt{2}} \tag{14}$$

Energie volných kmitů

Jak si ukážeme v následujícím výkladu, dochází při volném harmonickém kmitavém pohybu také k periodickým změnám jednotlivých forem energie (jak kinetické, tak i potenciální). Oscilátor koná kmitavý pohyb s rychlostí v, jeho kinetickou energii proto můžeme snadno vyjádřit z obecně platného vztahu $E_{\mathrm{k}} = \frac{1}{2} m v^2$, dobře známého z mechaniky pohybu hmotného bodu, v němž za okamžitou rychlost v dosadíme z výrazu (8). Platí

$$E_{\mathrm{k}} = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0) = \frac{1}{2} k A^2 \left[1 - \sin^2(\omega t + \varphi_0)\right] \tag{15}$$

Kinetická energie volného oscilátoru tedy bude

$$E_{\mathrm{k}} = \frac{1}{2} k (A^2 - x^2) \tag{16}$$

neboť $A^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0)$ je výchylka x.

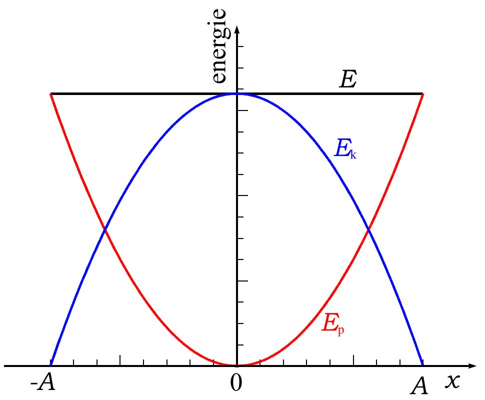
Potenciální energii kmitů jsme odvodili v učební pomůcce Energie. Je určena rovnicí

$$E_{\mathrm{k}} = \frac{1}{2} k x^2, \tag{17}$$

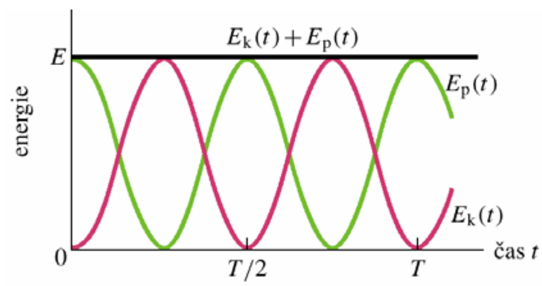
kde x je výchylka kmitů. Celkovou energii získáme jako součet kinetické a potenciální energie

$$E = E_{\mathrm{k}} + E_{\mathrm{p}} = \frac{1}{2} k (A^2 - x^2) + \frac{1}{2} k x^2, \tag{18}$$

a po úpravě.



obr. 4 Kinetická, potenciální a celková energie v závislosti na výchylce oscilátoru



obr. 5 Kinetická, potenciální a celková energie v závislosti na čase

$$E = \frac{1}{2} k A^2. \tag{19}$$

Na obr. 4 jsou zakresleny průběhy všech forem energie volného oscilátoru v závislosti na jeho výchylce.

Tlumené kmity

U skutečných oscilátorů se však amplituda kmitů postupně zmenšuje a s tím se zmenšuje i celková energie oscilátoru. Příčinou může být (např. u tělesa kmitajícího na pružině) odpor prostředí proti pohybu tělesa, případně vlastnosti oscilátoru samého. V takovém případě hovoříme o **kmitání tlumeném**.

Pohybová rovnice

U tlumených kmitů působí na oscilátor kromě direktivní síly ještě tlumící síla a již žádná jiná. Tlumící silou může být tření, odpor prostředí aj. Velikost tlumící síly závisí obvykle přímo úměrně na velikosti rychlosti oscilátoru. Přitom pro orientaci této síly je charakteristické, že míří proti směru pohybu (proti směru rychlosti) kmitajícího tělesa. Lze ji proto psát ve tvaru

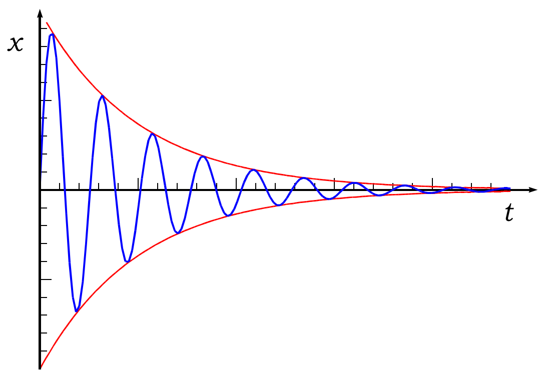
$$F_{\mathrm{t}} = -R_{\mathrm{m}} \upsilon = -R_{\mathrm{m}} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \tag{20}$$

kde R_{m} je **mechanický odpor** nebo také mechanická rezistence. Využijeme rovnic (4) pro direktivní sílu a (20) pro tlumící sílu a sestavíme pohybovou rovnici.

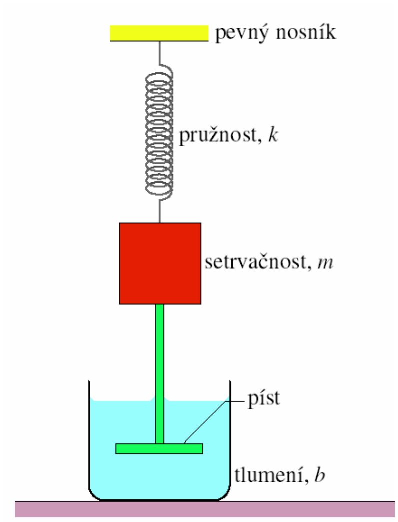
$$\begin{gathered} F_{\mathrm{d}} + F_{\mathrm{t}} = ma \\ -kx - R_{\mathrm{m}} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = m \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} \end{gathered} \tag{21}$$

a úpravou

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + 2\delta \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x = 0 . \tag{22}$$



obr. 6 Časová závislost výchylky tlumených kmitů



obr. 7 Ukázka tlumených kmitů

Rovnice (22) je **diferenciální pohybová rovnice tlumených kmitů**, ve které $\delta = \dfrac{R_{\mathrm{m}}}{2m}$ je **součinitel tlumení** (jednotka s^{-1}) a $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ je **vlastní frekvence volného oscilátoru** (jednotka s^{-1}).

Řešením diferenciální rovnice (22), které se budete učit v matematice, je získání závislosti výchylky tlumených kmitů na čase $x(t)$. Jedná se o homogenní diferenciální rovnici druhého řádu se dvěma konstantními koeficienty 2δ a ω_0^2. Řešení je různé podle vzájemné velikosti konstant ω_0 a δ.

Výchylka tlumených kmitů

1) Pokud je splněna podmínka $\omega_0 > \delta$, je **tlumeni oscilátoru podkritické**. Pak vzniknou kvazi-periodické kmity s výchylkou

$$x = A_0 e^{-\delta t} \sin(\omega_t t + \varphi_0) \tag{23}$$

a exponenciálně klesající amplitudou $A = A_0 e^{-\delta t}$, kde

$$\omega_t = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \tag{24}$$

je úhlová frekvence podkriticky tlumených kmitů. Graficky je průběh rovnice (23) zakreslen na obr. 6.

2) Pokud je splněna podmínka $\omega_0 = \delta$, je **tlumeni oscilátoru kritické**. Pak $\omega_t = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = 0$ a periodické ani kvazi-periodické kmity nevzniknou.

3) Podobně nevzniknou periodické ani kvazi-periodické kmity při splnění podmínky $\omega_0 < \delta$, při které je **tlumení oscilátoru nadkritické**. Potom je totiž výraz pod odmocninou v rovnici (24) záporný a úhlová frekvence v reálné oblasti neexisuje.

Jak je patrné z rovnice (24), tlumení pohybu se projeví na zmenšení úhlové frekvence kmitů ve srovnání s vlastními kmity téhož oscilátoru. Perioda T_t tlumených kmitů je naopak delší než u kmitů netlumených a s rostoucím tlumením se postupně dále prodlužuje.

Útlum a logaritmický dekrement útlumu

Kromě součinitele tlumených kmitů δ zavádíme ještě další obdobné parametry charakterizující tlumené kmity. Pokles výchylky během jedné periody charakterizuje **útlum.** Útlum je dán poměrem dvou za sebou následujících výchylek mezi nimiž je časový posun jedné periody tlumených kmitů, tedy

$$b = \frac{x(t)}{x(t + T_t)}. \tag{25}$$

Dosadíme-li do poslední rovnice výchylku podkriticky tlumených kmitů (23), dostaneme

$$b = \frac{A_0 e^{-\delta t} \sin(\omega_t t + \varphi_0)}{A_0 e^{-\delta (t+T_t)} \sin[\omega_t (t + T_t) + \varphi_0]} \tag{26}$$

a po úpravě, vzhledem k tomu, že $\sin[\omega_t (t + T_t) + \varphi_0] = \sin(\omega_t t + \varphi_0)$ a $e^{-\delta (t+T_t)} = e^{-\delta t} e^{-\delta T_t}$,

$$b = e^{\delta T_t}. \tag{27}$$

Přirozený logaritmus útlumu

$$\Lambda = \ln b = \delta T_t \tag{28}$$

je **logaritmický dekrement** tlumených kmitů.

Nucené kmity

Se zmenšováním amplitudy u podkriticky tlumených kmitů klesá k nule také celková energie pohybu a za nějaký čas kmity vymizí. Mají-li se tedy tlumené kmity udržet, je nutné ztracenou energii doplňovat prací vnější síly. To je případ buzeného harmonického oscilátoru. Vzniklé kmity nazveme **buzené** nebo také **nucené**. Na oscilátor nyní bude působit, kromě direktivní a tlumící síly, ještě **periodická budící síla**

$$F_b = F_{max} \sin(\omega_b t + \varphi_{0b})\,. \tag{29}$$

Budící síla se opakuje s periodou $T_b = \dfrac{2\pi}{\omega_b}$ a její maximální hodnota je F_{max}. Postupem stejným jako při sestavení pohybové rovnice tlumených kmitů dostaneme **diferenciální pohybovou rovnici nucených kmitů**

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_{max}}{m} \sin(\omega_b t + \varphi_{0b})\,. \tag{30}$$

Její řešení je

$$x(t) = A_0 e^{-\delta t} \sin(\omega_t t + \varphi) + A_b \sin(\omega_b t + \phi) \tag{31}$$

a pro časy $t > t_{min}$, kde čas t_{min} je čas, od kterého lze první člen rovnice (30) považovat za nulový, dostaneme jednoduché řešení rovnice (30) ve tvaru

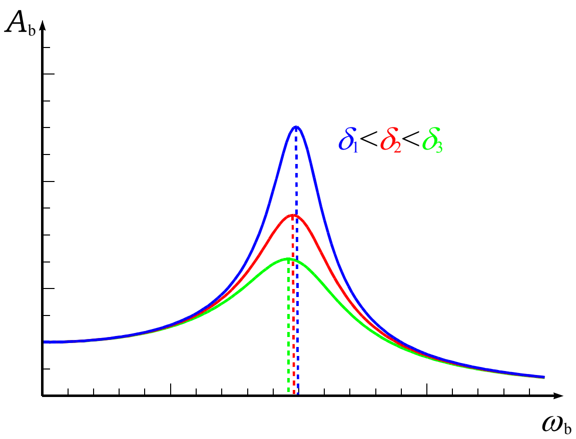
$$x(t) = A_b \sin(\omega_b t + \phi)\,. \tag{32}$$

Kmity splňující rovnici (32) lze nazvat nucené kmity v ustáleném stavu. Amplitudu nucených kmitů v ustáleném stavu lze počítat rovnicí

$$A_b = \frac{F_{max}}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_b^2)^2 + (2\delta)^2 \omega_b^2}} \tag{33}$$

a počáteční fázi nucených kmitů v ustáleném stavu lze počítat jako

$$\tan\phi = \frac{2\delta\,\omega_b}{\omega_0^2 - \omega_b^2}\,. \tag{34}$$



obr. 8 Závislost amplitudy nucených kmitů na frekvenci budící síly pro 3 různé součinitele tlumení

Rezonance

Pokud sledujeme závislost amplitudy nucených kmitů (33) na frekvenci budící síly, dostaneme průběh znázorněný na obr. 8. Jak lze z obrázku vypozorovat, při určité budící frekvenci dosahuje amplituda výrazného maxima. Při této frekvenci je oscilátor v **rezonanci**.

Hledejme, při které frekvenci budící síly je splněna rezonanční podmínka $A_{\mathrm{b}} \rightarrow \max$. Je to tehdy, když první derivace amplitudy (33) podle úhlové frekvence budící síly je nulová, tedy když je splněna **resonanční podmínka**

$$\frac{\mathrm{d}A_{\mathrm{b}}}{\mathrm{d}\omega_{\mathrm{b}}} = 0 \tag{35}$$

To je splněno tehdy, přihlédneme-li k tomu, že jen výraz pod odmocninou v rovnici (33) může být extrémní, když

$$\frac{\mathrm{d}\left[(\omega_0^2 - \omega_{\mathrm{b}}^2)^2 + (2\delta)^2 \omega_{\mathrm{b}}^2\right]}{\mathrm{d}\omega_{\mathrm{b}}} = 0\,. \tag{36}$$

Po provedení derivace a úpravě dostaneme **rezonační frekvenci** nucených kmitů

$$\omega_{\mathrm{br}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}\,. \tag{37}$$

Rozborem posledního vztahu lze usoudit, že s rostoucím součinitelem tlumení δ rezonační frekvence a zároveň i amplituda buzených kmitů klesá. Tuto skutečnost potvrzuje obr. 8.

Nakonec ještě zjistíme amplitudu nucených kmitů v rezonanci. Do rovnice (33) dosadíme rezonanční frekvenci budící síly a dostaneme

$$A_{\mathrm{b}} = \frac{F_{\max}}{2m\delta\omega_{\mathrm{br}}}\,. \tag{38}$$

V případě, že se jedná o netlumené kmitání, tj. $\delta = 0$, pak se amplituda blíží k nekonečnu $A_{\mathrm{b}} \rightarrow \infty$. Poznamenejme, že obecně není budící síla ve fázi s výchylkou.