METODA NEJMENŠÍCH ČTVERCŮ

Obsah

Úvod – teorie 1
Příklad - měření prodloužení drátu při zatížení 1
Příklad - měření doby kmitu torzního kyvadla 2
Kalkulačka pro výpočty metodou nejmenších čtverců 3

Úvod – teorie

Ve všech případech, kdy z hodnot měřené závislosti dvou fyzikálních veličin zatížených chybami určujeme její nejpravděpodobnější průběh, mluvíme o vyrovnání funkční závislosti. Toto vyrovnání lze provádět graficky i numericky. Nejznámější numerická vyrovnávací metoda je **metoda nejmenších čtverců**. Metoda nejmenších čtverců slouží k nalezení takového vyrovnání měření, aby součet druhých mocnin chyb nalezeného řešení byl minimální. Zjednodušeně, aby součet čtverců odchylek byl nejmenší.

Pro proložení změřených hodnot přímkou s rovnicí

$$y = a\,x + b \tag{1}$$

lze vypočítat koeficienty *a*, *b* z naměřených hodnot podle následujících vzorců.

$$a = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}, \tag{2}$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}, \tag{3}$$

kde *n* je počet vyrovnávaných dvojic x_i, y_i, tedy počet měřených hodnot.

Příklad - měření prodloužení drátu při zatížení

Metodu nejmenších čtverců nejdříve použijeme pro určení závislosti prodloužení drátu na jeho zatížení. Měření jsou uspořádána v tab. 1. K určení závislosti

$$\Delta l = a\,F + b \tag{4}$$

potřebujeme nalézt součty $\sum_{i=1}^{n} F_i$, $\sum_{i=1}^{n} \Delta l_i$, $\sum_{i=1}^{n} F_i^2$, $\sum_{i=1}^{n} F_i\,\Delta l_i$, které dosadíme do rovnic (2) a (3). S využitím součtů uvedených na posledním řádku tab. 1. dostaneme

$$a = \frac{10.219{,}10 - 269{,}78.6{,}403}{10.9262{,}7 - (269{,}78)^2} = 0{,}0234 \text{ mm.N}^{-1},$$

$$b = \frac{9262{,}7.6{,}403 - 269{,}78.219{,}10}{10.9262{,}7 - (269{,}78)^2} = 0{,}00859 \text{ mm}\,.$$

	F/ N	Δ l / mm	F^2 / N^2	F.Δl / N.mm
	4,91	0,128	24,1	0,63
	9,81	0,241	96,2	2,36
	14,72	0,350	216,5	5,15
	19,62	0,468	384,9	9,18
	24,53	0,584	601,5	14,32
	29,43	0,692	866,1	20,37
	34,34	0,812	1 178,9	27,88
	39,24	0,927	1 539,8	36,38
	44,15	1,045	1 948,8	46,13
	49,05	1,156	2 405,9	56,70
Σ	269,78	6,403	9 262,7	219,10

tab. 1 Měření modulu pružnosti drátu v tahu

Známe-li hodnoty konstant a, b, potom je možné závislost prodloužení Δl na zatěžující síle F vyjádřit numericky rovnicí

$$\Delta l = a\ F + b = (0{,}0234\,\text{mm.N}^{-1})\ F + 0{,}00859\,\text{mm} \quad . \tag{5}$$

Příklad - měření doby kmitu torzního kyvadla

Ve druhém příkladě použijeme metodu nejmenších čtverců pro nalezení doby kmitu torzního kyvadla. Měření času při kmitání kyvadla provedeme bez zastavení stopek po $k = 5$, 10, 15, …, 50 kmitech (zaznamenáváme mezičasy). V tab. 2 jsou uspořádány naměřené hodnoty. Například, čas 18,84 s byl dosažen po 10 kmitech. Graf měření je na obr. 1, závislost je lineární (přímková) a může tedy být provedeno proložení daných hodnot přímkou metodou nejmenších čtverců.

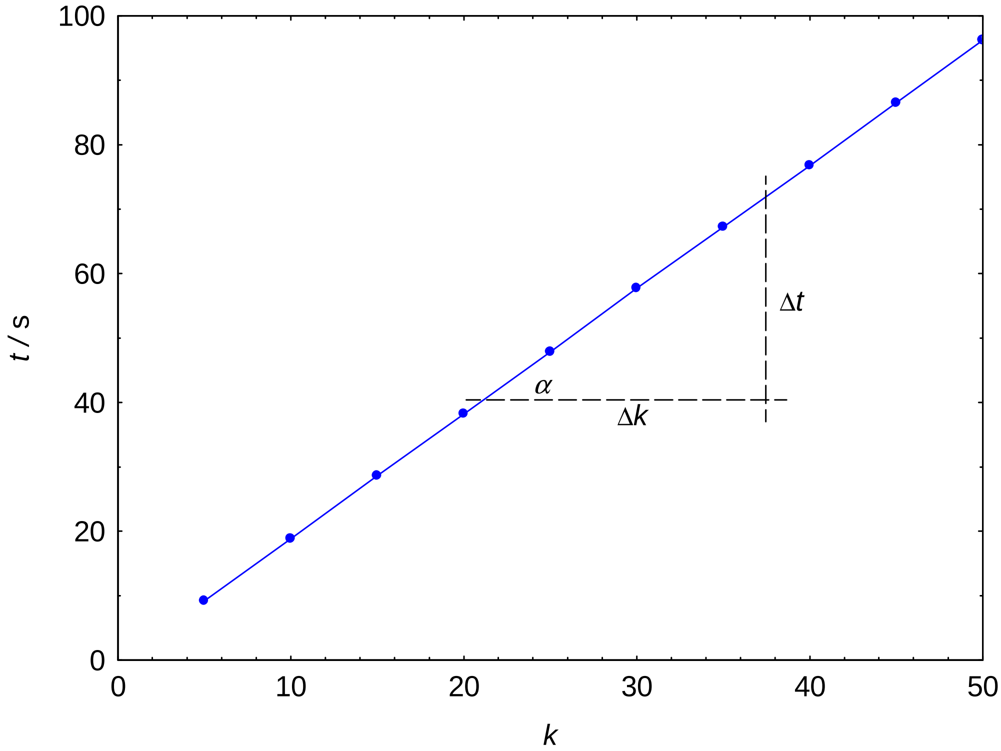
	k	t/s	k^2 / s^2	$k.t$/ s
	5	9,18	25	45,90
	10	18,84	100	188,40
	15	28,59	225	428,85
	20	38,21	400	764,20
	25	47,84	625	1 196,00
	30	57,71	900	1 731,30
	35	67,21	1 225	2 352,35
	40	76,77	1 600	3 070,80
	45	86,49	2 025	3 892,05
	50	96,21	2 500	4 810,50
∑	275	527,05	9 625	18 480,35

tab. 2 Měření času po 5, 10, 15, …, 50 *kmitech torzního kyvadla*

Do tab. 2 vypočítáme pro každý řádek k^2 (druhá mocnina počtu kmitů) a $k.t$ (součin počtu kmitů a odpovídajícího času). Potom provedeme, na posledním řádku tabulky, součty řádků každého sloupce. Pomůžeme si například aplikací Excel. Tím jsme získali součty

$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} k_i = 275$, $\sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{i=1}^{n} t_i = 527{,}05\ \mathrm{s}$, $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} k_i^2 = 9625$ a $\sum_{i=1}^{n} x_i\ y_i = \sum_{i=1}^{n} k_i\ t_i = 18480{,}35\ \mathrm{s}$. Tyto součty dosadíme do rovnice (2) a dostaneme

$$a = \frac{10.18480{,}35 - 275.527{,}05}{10.6925 - (275)^2} = 1{,}933\ \mathrm{s}. \qquad (6)$$



obr. 1 Znázornění závislosti času na počtu kmitů torzního kyvadla

Získaná hodnota *a* je směrnice přímky dané rovnicí

$$t = a.k + b\,. \qquad (7)$$

a odpovídá $a = \mathrm{tg}\alpha = \dfrac{\Delta t}{\Delta k} = T$, což je doba jedné periody (čas dělený počtem kmitů). Získali jsme výsledek

$$T = 1{,}933\ \mathrm{s}. \qquad (8)$$

Kalkulačka pro výpočty metodou nejmenších čtverců

Na stránce http://fyzika.fce.vutbr.cz/index.php?stranka_id=156 je kalkulačka pro rychlé výpočty metodou nejmenších čtverců. Doporučuji ji využít.