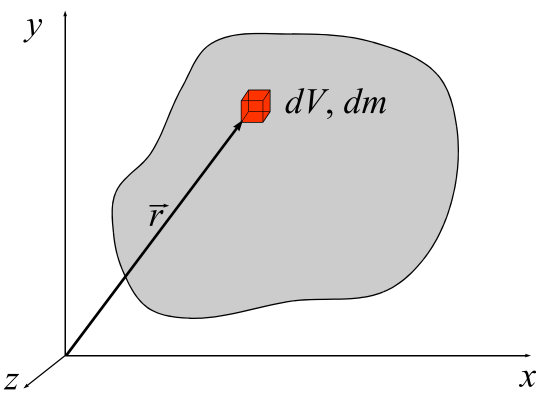
TUHÉ TĚLESO

Tuhé těleso je těleso, pro které platí, že libovolná síla působící na těleso nezpůsobí jeho deformaci, ale může mít pouze pohybový účinek. Libovolná dvojice bodů ležících na tuhém tělesa má stále stejnou vzdálenost.

Obsah

Popis vlastností tuhého tělesa



obr. 1 Zavedení elementární části tělesa

Integrální popis tuhého tělesa

Při integrálním popisu tuhého tělesa zavádíme jeho elementární část velmi malých rozměrů (element tělesa) o hmotnosti dm a objemu $\mathrm{d}V$, jak ukazuje obr. 1. Z elementů se skládá těleso. Pak definujeme **hustotu tělesa**

$$\rho = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}V} \quad . \qquad (1)$$

Jednotka hustoty je $[\rho] = \mathrm{kg.m^{-3}}$.

Matematickým důsledkem přechodu od soustavy **konečného počtu hmotných bodů** ke **spojitým elementům tělesa** je přechod od součtu konečného počtu sčítanců k integraci přes objem nebo hmotnost tělesa, tedy

$$\sum_{k=1}^{n} \quad \to \quad \int_V \ldots \,\mathrm{d}V \quad \text{nebo} \quad \int_m \ldots \,\mathrm{d}m\,.$$

Pak **hmotnost tělesa** (s přihlédnutím k $\mathrm{d}m = \rho\,\mathrm{d}V$) určíme jako

$$m = \int_m \mathrm{d}m = \int_V \rho\,\mathrm{d}V \ . \qquad (2)$$

Hybnost tělesa bude dána integrací hybností $d\vec{p}$ všech elementů tělesa

$$\vec{p} = \int \mathrm{d}\vec{p} = \int_V \rho\,\vec{v}\,\mathrm{d}V \ , \qquad (3)$$

kde $\vec{v}$ je rychlost obecného elementu tělesa

Těžiště tělesa

Těžiště tělesa je pomyslný bod pro který platí, že je do něj soustředěna veškerá hmotnost a hybnost tělesa, tedy ve shodě s přechodem od sumace k integraci

$$m_\mathrm{T} = \int_V \rho\,\mathrm{d}V \ , \qquad (4)$$

$$\vec{p}_\mathrm{T} = \int_V \rho\,\vec{v}\,\mathrm{d}V \ . \qquad (5)$$

Řešením rovnice (4) a (5) dostaneme polohu těžiště

$$\vec{r}_\mathrm{T} = \frac{1}{m}\int_V \rho\,\vec{r}\,\mathrm{d}V \ , \qquad (6)$$

pro **homogenní těleso**, pro něž platí $\rho = konst$, je poloha těžiště určena vztahem

$$\vec{r}_\mathrm{T} = \frac{1}{V}\int_V \vec{r}\,\mathrm{d}V \ , \qquad (7)$$

Těžiště může ležet i mimo těleso.

Rovnovážná poloha tuhého tělesa

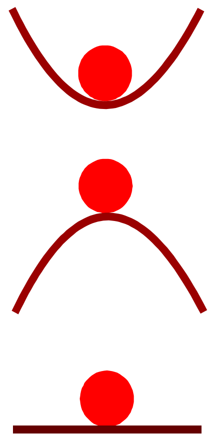
Rovnovážná poloha je poloha tuhého tělesa, při níž je výslednice všech sil působících na těleso *nulová* a výsledný moment všech sil je také *nulový*.

$$\vec{F} = \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_j = 0\,, \qquad (8)$$

$$\vec{M} = \sum_{j=1}^{N} \vec{M}_j = 0\,, \qquad (9)$$

kde N je počet sil působících na těleso.

Typy rovnovážných poloh



obr. 2

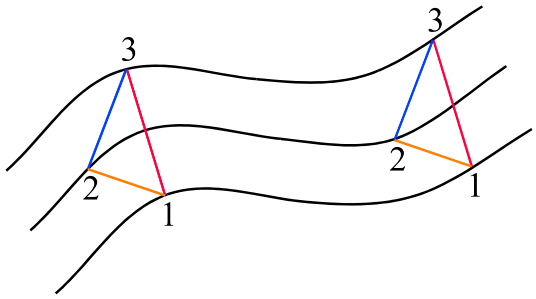
Stálá rovnovážná poloha (též **stabilní**) je poloha, pro kterou platí, že vychýlením z této polohy se těleso vrací zpět. Potenciální energie E_p tělesa ve stálé rovnovážné poloze je **nejmenší**, při vychýlení se **zvětšuje** $(\Delta E_\mathrm{p} > 0)$.

Vratká rovnovážná poloha (též **labilní**) je poloha, pro kterou platí, že vychýlením z této polohy se těleso **nevrací** zpět. Potenciální energie E_p tělesa je ve vratké rovnovážné poloze je **největší**. Vychýlením z vratké polohy se potenciální energie tělesa **zmenšuje** $(\Delta E_\mathrm{p} < 0)$.

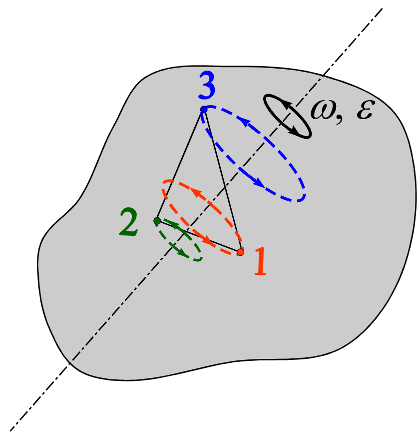
Volná rovnovážná poloha (též **indiferentní**) je poloha, pro kterou platí, že vychýlením tělesa se výslednice sil ani výsledný moment sil působících na těleso **nemění** $(E_\mathrm{p} = konst)$.

Posuvný pohyb tuhého tělesa

Posuvný pohyb (nebo **translace**) je takový pohyb tuhého tělesa, při kterém všechny body



obr. 3 Znázornění posuvného pohybu tělesa



obr. 4 Znázornění otáčivého pohybu tělesa

tělesa konají pohyb po stejných, pouze navzájem posunutých, trajektoriích. Rychlosti a zrychlení jednotlivých bodů tělesa jsou při posuvném pohybu stejné, proto lze zkoumání posuvného pohybu převést na zkoumání pohybu jediného z bodu, nejčastěji těžiště.

Otáčivý pohyb tuhého tělesa

Rotace (nebo **otáčivý pohyb**) je takový pohyb tuhého tělesa, při kterém se všechny body tělesa otáčejí kolem jedné společné **osy otáčení** se stejnou úhlovou rychlostí. Trajektoriemi jednotlivých bodů tělesa jsou soustředné kružnice. Úhlové rychlosti a úhlová zrychlení jednotlivých bodů tělesa jsou při otáčivém pohybu stejné.

Osa otáčení

Osa otáčení je přímka kolem které se těleso při otáčivém pohybu otáčí. Body tělesa, které na ose leží, zůstávají na svých místech, jejich rychlost je nulová.

Moment setrvačnosti

Pro otáčivý pohyb tělesa kolem osy otáčení zavádíme **moment setrvačnosti**, který definujeme vztahem

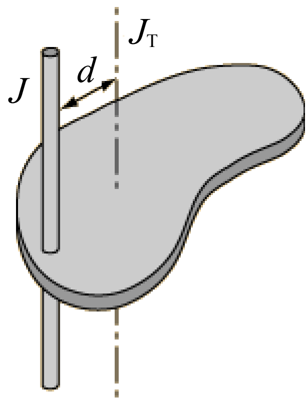
$$J = \int_V \rho r^2 \, \mathrm{d}V \,, \tag{10}$$

jeho jednotka je $[J] = \mathrm{kg.m^2}$. Moment setrvačnosti je veličina, která závisí na geometrických vlastnostech tělesa a na umístění osy rotace. Je-li těleso **homogenní**, je jeho hustota ρ konstantní v celém jeho objemu $(\rho = konst)$. Potom lze předchozí vyjádření zapsat v jednodušší podobě

$$J = \rho \int_V r^2 \, \mathrm{d}V \,. \tag{11}$$

V rovnicích (10) a (11) je r proměnná vzdálenost elementu tělesa $\mathrm{d}V$ od osy rotace. Vzorce pro výpočet momentů setrvačnosti některých těles k různým osám rotace uvádím v samostatné studijním materiálu Vzorce momentů setrvačnosti.

Steinerova věta



pro moment setrvačnosti tělesa vzhledem k ose otáčení jdoucí mimo těžiště tělesa platí Steinerova věta

$$J = J_\mathrm{T} + m d^2 \,, \tag{12}$$

kde J_T je moment setrvačnosti vzhledem k ose jdoucí těžištěm tělesa, m je hmotnost tělesa a d je kolmá vzdálenost těžiště od osy otáčení.

Kombinovaný pohyb tuhého tělesa

Kombinovaný pohyb tuhého tělesa je pohyb, při němž se **osa rotace posouvá**, tj. nemění svůj směr a kolem této osy těleso rotuje.

Energie tuhého tělesa

Potenciální energie tuhého tělesa

Potenciální energie tuhého tělesa není určena pohybem, ale **polohou tělesa**, **nerozhoduje tedy způsob pohybu**. Pokud jako polohu tělesa vybereme polohu jeho těžiště, lze potenciální energii tuhého tělesa počítat stejně jako potenciální energii hmotného bodu, tedy, např. pro gravitační pole pro těleso blízko Země

$$E_\mathrm{p}(h) = m g h \,, \tag{13}$$

nebo pro těleso daleko od Země s nulovou potenciální energií v $h \to \infty$

$$E_\mathrm{p}(h) = -\kappa \frac{m_Z m}{R+h} \,. \tag{14}$$

Kinetická energie tuhého tělesa

Při výpočtu kinetické energie tělesa **rozhoduje** typ pohybu.

Kinetická energie při posuvném pohyb tělesa

Kinetická energie E_k tuhého tělesa při posuvném pohybu je stejná jako pro hmotný bod

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2} m v_\mathrm{T}^2 , \qquad (15)$$

kde m je hmotnost celého tělesa a v_T je rychlost těžiště tělesa.

Kinetická energie při otáčivém pohyb tělesa

Kinetická energie E_k tuhého tělesa při otáčivém pohybu je rovna

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2} J \omega^2 , \qquad (16)$$

kde J je **moment setrvačnosti** tělesa vzhledem k ose otáčení a ω je úhlová rychlost, se kterou se těleso otáčí.

Kinetická energie při kombinovaném pohyb tělesa

Kinetická energie E_k tuhého tělesa při kombinovaném pohybu je rovna

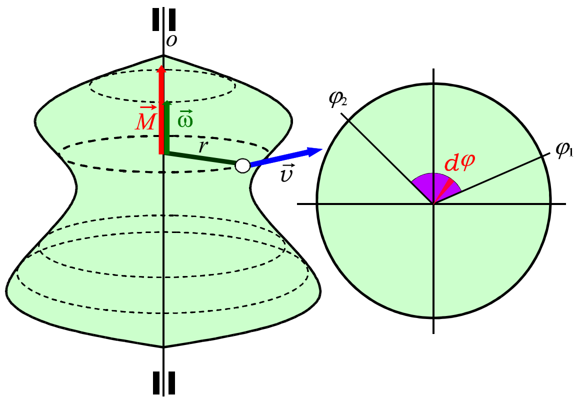
$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} J \omega^2 , \qquad (17)$$

kde v je posuvná rychlost osy rotace, m je hmotnost tělesa, J je **moment setrvačnosti** tělesa vzhledem k ose otáčení a ω je úhlová rychlost, se kterou se těleso otáčí.

Práce a výkon při otáčení tuhého tělesa

Práce

Předpokládejme otáčení tělesa kolem pevné osy jak naznačuje obr. 5. Vlevo je pohled na celé těleso, vpravo je pohled na řez tělesem kolmo na osu otáčení. Velmi malé pootočení tělesa odpovídá změně úhlové dráhy o $d\vec{\varphi}$. Vektor momentu síly $\vec{M}$, který je příčinou otáčení, vektor úhlové rychlosti $\vec{\omega}$, vektor úhlové dráhy $\vec{\varphi}$ a vektory všech ostatních rotačních veličin leží v ose rotace. Práce W momentu síly, při otočení tělesa z počáteční úhlové polohy $\vec{\varphi}_1$ do konečné úhlové polohy $\vec{\varphi}_2$ bude



obr. 5 K popisu práce při otáčení tělesa

$$W = \int_{\vec{\varphi}_1}^{\vec{\varphi}_2} \vec{M} . \mathrm{d}\vec{\varphi} . \qquad (18)$$

Je to podobný způsob výpočtu jak při výpočtu práce při posuvném pohybu, s tím rozdílem, že „translační“ veličiny nahrazujeme „rotačními“, viz Porovnání translačního a rotačního pohybu. Práce řešená rovnicí (18) není omezena úhlovou dráhou 1 otáčky, všechny úhlové dráhy mohou nabývat hodnot větších než 2π .

Výkon

Výkon při otáčení tuhého tělesa určíme z jeho definice

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \frac{\vec{M}.\,\mathrm{d}\vec{\varphi}}{\mathrm{d}t}, \tag{19}$$

tedy

$$P = \vec{M}.\vec{\omega}\,. \tag{20}$$

Pohybová rovnice při otáčení tuhého tělesa

při otáčení tuhého tělesa kolem pevné osy lze odvodit jeho **pohybovou rovnici** ve tvaru

$$\vec{M} = J.\vec{\varepsilon}\,, \tag{21}$$

kde J je moment setrvačnosti tělesa popsaný výše.