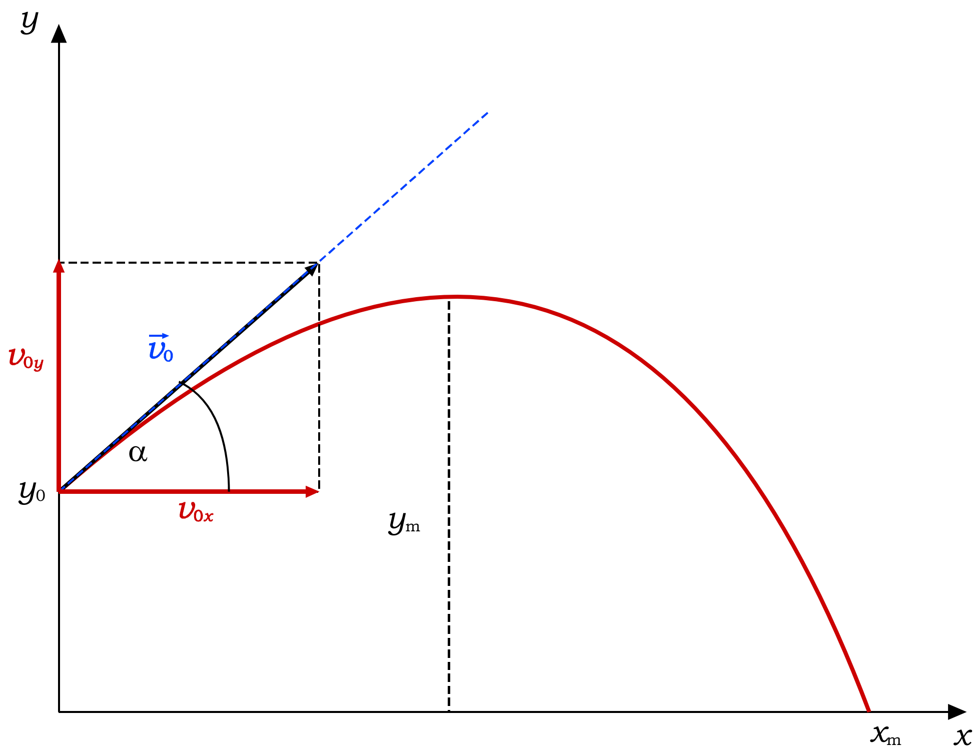
VRHY TĚLES V GRAVITAČNÍM POLI

Obsah

Vrhy těles obecně 1
Příklad 1 2
Příklad 2 2
Volný pád 3
Příklad 3 3
Svislý vrh vzhůru 3
Příklad 4 3
Vodorovný vrh 4
Příklad 5 4
Příklad 6 4
Poznámka 4

Vrhy těles obecně

Nejobecnějším vrhem tělesa je šikmý vrh vzhůru, který popíšeme a z něj zjednodušíme ostatní vrhy.



obr. 1 Šikmý vrh vzhůru

Předpokládejme, že těleso má počáteční rychlost $\vec{v}_0$ svírající s vodorovným směrem elevační úhel α. Zanedbejme odpor vzduchu. Pohyb se skládá:

1. Ve vodorovném směru, kterým proložíme osu x, z **rovnoměrného přímočarého**

pohybu rychlostí v_{0x}.

2. Ve směru vzhůru, kterým proložíme osu y, z **rovnoměrně zpožděného pohybu**. Zpoždění $a = -g$ má hodnotu gravitačního zrychlení. Budeme důsledně dosazovat $-g$.
3. Ve směru osy z pohyb neprobíhá, trajektorií tedy bude rovinná křivka.

Proto směr x platí:

$$v_x = v_0 \cos\alpha = konst. \tag{1}$$

$$x = x_0 + v_0 t \cos\alpha , \tag{2}$$

Rovnice (1) je formální (říká jen, že rychlost je konstantní), nebudeme ji používat. Pro směr y platí:

$$v_y = v_0 \sin\alpha - gt . \tag{3}$$

$$y = y_0 + v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2 , \tag{4}$$

Obvykle je vhodné položit počátek souřadné soustavy do bodu $(x_0 = 0\,,\, y_0 = 0)$, nebo alespoň do bodu $(x_0 = 0,\, y_0 > 0)$, jak ukazuje obr. 1. Potom z rovnic (2) až (4) vypadne konstanta x_0.

Při pohybu v prostředí s nezanedbatelným odporem opisuje těleso asymetrickou balistickou křivku, u které je délka vrhu kratší než u pohybu při zanedbání odporu vzduchu.

Příklad 1

Určete maximální výšku šikmého vrhu vzhůru.

Řešení: Maximální dosaženou výšku, která splňuje podmínku $v_y = 0$, najdeme dosazením podmínky do rovnic (3) a (4) dostaneme

$$v_0 \sin\alpha = gt,$$

$$t = \frac{v_0 \sin\alpha}{g},$$

$$y_m = y_0 + v_0\left(\frac{v_0 \sin\alpha}{g}\right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_0 \sin\alpha}{g}\right)^2,$$

$$y_m = y_0 + \frac{1}{2}\frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{g}$$

Příklad 2

Určete vzdálenost dopadu šikmého vrhu vzhůru.

Řešení: Délka vrhu, tedy vzdálenost, po které těleso dopadne, splňuje podmínku $y = 0$. Dosazením do rovnic (3) a (4) dostaneme

$$0 = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \sin\alpha + y_0 \ ,$$

$$t = \frac{v_0 \sin\alpha \pm \sqrt{(v_0 \sin\alpha)^2 - 2y_0 g}}{g} = \frac{v_0 \sin\alpha}{g} \pm \sqrt{(\frac{v_0 \sin\alpha}{g})^2 - \frac{2y_0}{g}},$$

Dosazením do rovnice (2)

$$x_\mathrm{m} = v_0 t \cos\alpha \ ,$$

$$x_\mathrm{m} = \frac{v_0 \sin\alpha + \sqrt{(v_0 \sin\alpha)^2 - 2y_0 g}}{g} v_0 \cos\alpha$$

Pro vrh z nulové výšky $y_0 = 0$.

$$x_\mathrm{m} = \frac{v_0{}^2 \sin 2\alpha}{g}$$

Volný pád

Pohyb probíhá pouze ve směru osy y (elevační úhel $\alpha = \frac{\pi}{2}$) proti směru osy y. Počáteční rychlost je nulová a pro rychlost proto dostáváme podle rovnice (3) vztah $v = -gt$. Výška, ve které se těleso nachází v čase t, je $y = y_0 - \frac{1}{2}gt^2$. Pohyb v ose x nenastává a proto se osa x nezavádí.

Příklad 3

Za jak dlouho spadne těleso na Zem volným pádem. Jakou rychlostí dopadne?

Řešení: Při dopadu je $y = 0$, a proto $0 = y_0 - \frac{1}{2}gt_d{}^2$, odtud $y_0 = \frac{1}{2}gt_d{}^2 \Rightarrow t_\mathrm{d} = \sqrt{\frac{2y_0}{g}}$.

Dopadne rychlostí $v = -gt$, kam dosadíme čas dopadu, $v = -gt_\mathrm{d} = -g\sqrt{\frac{2y_0}{g}}$ (znaménko minus říká, že rychlost míří proti směru osy y).

Svislý vrh vzhůru

Pohyb probíhá pouze ve směru osy y, elevační úhel $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Počáteční rychlost v_0 je nenulová a míří svisle vzhůru. Pro rychlost pak dostaneme vztah $v = v_0 - gt$. Okamžitá výška tělesa nad osou x je dána vztahem $y = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$, shodně se šikmým vrhem. V nejvyšším bodě výstupu je rychlost nulová $v = 0$. Z nejvyššího bodu padá těleso zpět volným pádem.

Příklad 4

Jaká je výška výstupu tělesa při svislém vrhu vzhůru, pokud ho uskutečníme a) z výšky h, b) ze Země?

Řešení:

a) Začneme rovnicí $\upsilon = \upsilon_0 - gt$ a dosadíme podmínku $\upsilon = 0$, neboť v nejvyšším bodě se těleso zastaví. Odtud získáme $\upsilon_0 = gt_{y\,\max}$ a úpravou dobu výstupu $t_{y\,\max} = \dfrac{\upsilon_0}{g}$.

Dosazením do vztahu $y = y_0 + \upsilon_0 t - \dfrac{1}{2}gt^2$, $t = t_{y\,\max}$, $y = h$, dostaneme po úpravě výšku výstupu $h = y_0 + \dfrac{\upsilon_0^2}{2g}$.

b) Do výsledku z předchozího odstavce dosadíme $y_0 = 0$ a dostaneme $h = \dfrac{{\upsilon_0}^2}{2g}$

Vodorovný vrh

Při vodorovném vrhu směřuje počáteční rychlost ve směru osy x (elevační úhel $\alpha = 0$). Počáteční rychlost ve směru y je nulová.

Příklad 5

Jaká je doba letu vodorovného vrhu?

Řešení: Pro dobu letu platí podmínka $y = 0$, neboť těleso dopadne. Dosazením této podmínky do rovnice $y = y_0 - \dfrac{1}{2}gt^2$ dostaneme dobu letu $t_m = \sqrt{\dfrac{2h}{g}}$. Dosazením doby letu do vztahu pro souřadnici x získáme délku vrhu $x_m = \upsilon_0\sqrt{\dfrac{2h}{g}}$.

Příklad 6

Vypočítejte délku vodorovného vrhu.

Řešení: Dosazením doby letu z předchozího příkladu do vztahu (2) s využitím podmínky $\cos\alpha = \cos 0 = 1$ dostaneme délka vrhu $x_\mathrm{m} = \upsilon_0 t_\mathrm{m} = \upsilon_0\sqrt{\dfrac{2h}{g}}$.

Poznámka

Vyřešené rovnice ve zde uvedených příkladech nelze přebírat k řešení jiného zadaného příkladu. Výchozími rovnice zadaného příkladu týkajícího se vrhu tělesa jsou vždy rovnice (2) až (4) nebo jejich modifikace.