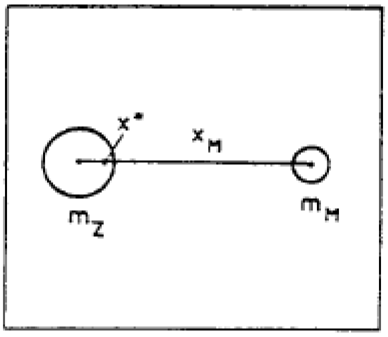
Dodatek k průvodci GB01 – P03
Příklady a otázky v učebním textu UT [2]:
Šikula J., Vašina P.: Mechanika tuhých těles, CERM, s.r.o. Brno

1. Příklad 3.1 na str. 12 UT [2]



obr. 7

Příklad 3.1

Nalezněte bod na spojnici Země - Měsíc, v němž je hmotný střed soustavy těchto 2 těles, chápaných jako hmotné body. Předpokládejme, že hmotnosti Měsíce m_M a Země m_Z spolu souvisí vztahem $m_Z = 80\, m_M$.

Řešení : Vztažný systém je tvořen osou x , počátek souřadnic je ve středu Země. Pro souřadnici hmotného středu x^* platí

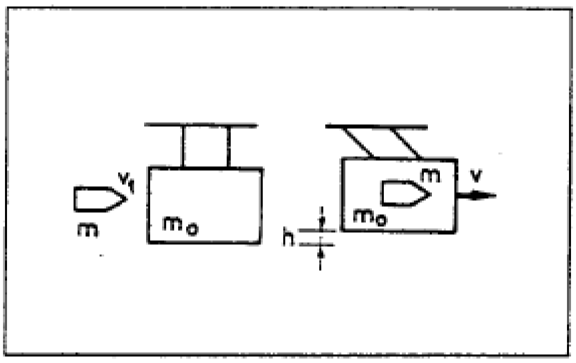
$$x^* = \frac{x_Z\, m_Z + x_M\, m_M}{m_Z + m_M} = \frac{m_M}{m_Z + m_M}\, x_M$$

$$x^* = x_M \,/\, 81 = 384 \cdot 10^3 \,/\, 81 = 4740 \text{ km.}$$

Hmotný střed soustavy Země - Měsíc leží 1630 km pod ideálním povrchem kulové Země.

2. Příklad 3.2 na str. 14 UT [2]

Střele o hmotnosti m byla vstřelena do balistického kyvadla o hmotnosti m_0. Po nárazu se hmotný střed kyvadla zvedl do výšky $h' = H + h$, kde H je původní výška kyvadla v libovolné poloze. Určete rychlost střely v_1.



obr. 8

Řešení : Střelu a kyvadlo považujeme za izolovanou soustavu dvou hmotných bodů. Vyjádříme celkovou hybnost soustavy před nárazem a po nárazu. Tyto dvě hybnosti musí být vzájemně rovny. Hybnost střely před nárazem je $m\ v_1$, hybnost kyvadla před nárazem je rovna nule (obr.8). Jakmile střela vnikne do kyvadla, je hybnost obou těles stejná a je rovna $(m + m_0)\ v$, kde v je rychlost v okamžiku, kdy střela vnikla do kyvadla a vzhledem k němu se zastavila.

Platí :

$$mv_1 = (m + m_0)\ v$$

Kinetická energie soustavy bezprostředně po vniknutí střely do balistického kyvadla je :

$$E_k = \frac{1}{2}\ m^2 v_1^2\ /\ (m + m_0)$$

a rovná se jeho potenciální energii v bodě , kde $v=0$:

$$\frac{1}{2}\ m^2 v_1^2\ /\ (m + m_0) = (m + m_0)\ g\ h$$

Odtud

$$v_1 = \frac{m + m_0}{m}\ \sqrt{(2\ gh)}$$

rychlost střely je přímo úměrná druhé odmocnině z výšky kyvadla .

3. Otázky 1 – 6 na str. 12, otázky 1 – 5 na str.16 UT [2]

1. Jak se určí poloha hmotného středu soustavy hmotných bodů : výpočtem , experimentálně ?
2. Vysvětlete, jak se pohybuje hmotný střed střepin granátu, který explodoval. Předpokládejte , že jde o pohyb ve vakuu.
3. Závisí poloha hmotného středu soustavy hmotných bodů na velikosti a směru sil, působících na jednotlivé body ?
4. Ovlivní pohyb hmotného středu tuhé soustavy hmotných bodů otáčení jednotlivých bodů kolem osy, která jím prochází ?
5. U závodních automobilů bývá zpravidla motor umístěn v polovině délky vozu. Vysvětlete přednosti tohoto způsobu umístění motoru.
6. Vysvětlete z hlediska zákona akce a reakce (resp. z hlediska vnitřních a vnějších sil) pohyb člověka , táhnoucího či tlačícího břemeno (vozík) .

4. Příklad 3.2 na str. 19 - 20 UT [2]

Nalezněte polohu hmotného středu homogenní desky o zanedbatelně malé tloušťce d , která má tvar poloviny kruhu o poloměru R .

Řešení: Ve vztažném systému podle obr.13 platí

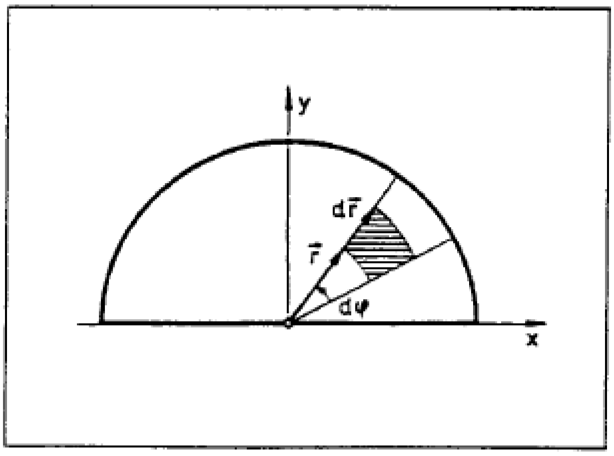
$$x = r \, . \cos \varphi \, , \quad y = r \, . \sin \varphi$$

$$x^* = \left(\int x \, . \, dS\right)/S \quad , \quad y^* = \left(\int y \, . \, dS\right)/S$$

Element plochy je roven plošnému obsahu vyšrafované části ,která je

$$dS = r \, . \, d\varphi \, . \, dr$$

Integrace podle r se provede v mezích [0 , R] . Úhel φ probíhá hodnoty od 0 do π .



obr. 13

Určíme nejprve

$$S = \int_{\varphi=0}^{\pi} \left(\int_0^R r \, . \, dr \right) d\varphi = \frac{1}{2} \pi R^2$$

Nyní vypočítáme

$$x^* = \frac{2}{\pi R^2} \int_0^{\pi} \left(\int_0^R r^2 \cos \varphi \, dr \right) d\varphi = \frac{2R^3}{3\pi R^2} \int_0^{\pi} \cos \varphi \, d\varphi = 0$$

$$y^* = \frac{2}{\pi R^2} \int_0^{\pi} \left(\int_0^R r^2 \sin \varphi \, dr \right) d\varphi = \frac{2R^3}{3\pi R^2} \int_0^{\pi} \sin \varphi \, d\varphi = \frac{4R}{3\pi}$$

5. Příklad 3.3 na str. 26 UT [2]

Je dána soustava 3 sil působících v rovině XY podle obr. 23. Velikosti sil jsou $F_1 = 160\ \mathrm{N}$, $F_2 = 100\ \mathrm{N}$, $F_3 = 120\ \mathrm{N}$. Nalezněte výslednici této soustavy sil :

Řešení : Vyjádříme působící síly

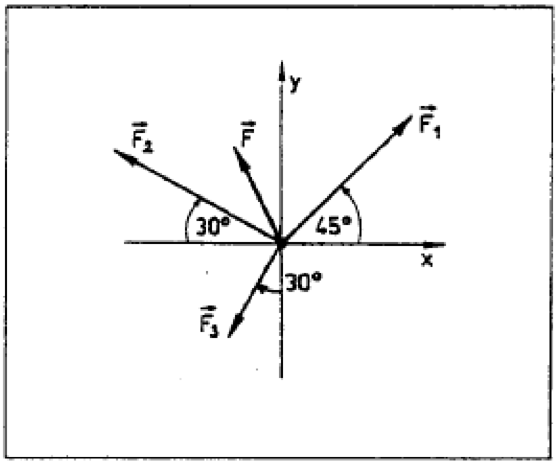
$$\vec{F}_1 = 160 \,.\, \left(\vec{i}.\cos(+45°) + \vec{j}.\sin(+45°)\right)$$
$$\vec{F}_2 = 100 \,.\, \left(-\vec{i}.\cos(+30°) + \vec{j}.\sin(+30°)\right)$$
$$\vec{F}_3 = -120 \,.\, \left(\vec{i}.\cos(+60°) + \vec{j}.\sin(+60°)\right)$$

Výsledná síla $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$:

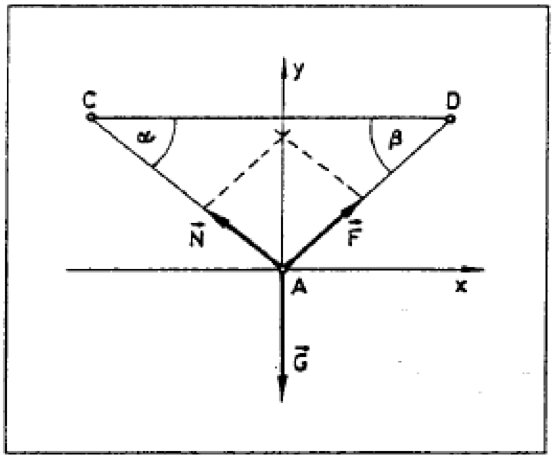
$$\vec{F} = \vec{i} \,.\, \left(160 \,.\, 2^{-\frac{1}{2}} - 50\sqrt{3} - 60\right) + \vec{j} \,.\, \left(60 \,.\, 2^{-\frac{1}{2}} + 50 - 60\sqrt{3}\right)$$
$$= -33{,}5 \,.\, \vec{i} + 59{,}2 \,.\, \vec{j}$$

Velikost výsledné síly je $\left|\vec{F}\right| = \left[33{,}5^2 + 59{,}2^2\right]^{\frac{1}{2}} = 68\ \mathrm{N}$.

Směr síly F je dán úhlem α , pro který platí $\cos\alpha = -\ 33{,}5/68$. Z toho $\alpha = 119°$.



obr.23



obr.24

6. Příklad 3.4 na str. 26 UT [2]

Vypočitejte síly v lanech podle obr. 24 , je-li tíha břemene G.

Řešení : Zvolíme souřadný systém podle obrázku. Je-li bod A v rovnováze, platí

$$\bar{F} + \bar{G} + \bar{N} = 0$$

a proto

$$F \cos\beta - N \cos\alpha = 0$$

$$-G + F \sin\beta + N \sin\alpha = 0$$

$$F = N \cos\alpha / \cos\beta$$

Po dosazení třetí rovnice do druhé a po úpravé dostaneme

$$N = \frac{G \cos\beta}{\cos(\alpha + \beta)} \quad . \qquad F = \frac{G \cos\alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$$

7. Otázka 1 – 5 na str. 30 UT [2]

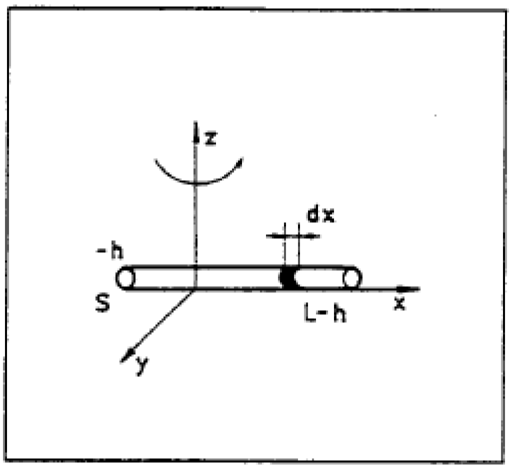
1. Kdy platí a co říká zákon zachování momentu hybnosti při rotačním pohybu tělesa ?
2. Jaké důsledky z něho plynou pro úhlovou rychlost setrvačníků ?
3. Vysvětlete význam veličin, které vystupují v pohybové rovnici pro otáčivý pohyb tělesa okolo pevné osy.
4. Co je pevná osa ? Jak se realizuje ? Uveďte příklad tělesa rotujícího okolo pevné osy.
5. Který z obrázků č. 27, 28 popisuje obvyklý pohyb kabin tzv. " ruského kola " ? Kdyby nedopatřením došlo k pohybu podle obr.28, vypadli by lidé z kabiny v nejvyšším bodě ?

8. Příklad 3.5 na str. 35 UT [2]

Vypočítejte moment setrvačnosti homogenní tyče o hmotnosti m a délce L vzhledem k ose kolmé na délku tyče a procházející ve vzdálenosti h od konce tyče (obr. 33).

Řešení : Tyč nahradíme úsečkou ležící na přímce $x = t$, $y = 0$, $z = 0$ pro $t \in (-h , L - h)$. Hmotnost na jednotku délky tyče je

$$\rho = m / L .$$



obr.33

Podle (5.5) dostaneme

$$J_z = \int_{-h}^{L-h} t^2 \frac{m}{L} dt$$

$$J_z = \frac{1}{3} m \left(L^2 - 3 L h + 3 h^2 \right)$$

Prochází-li osa koncem tyče je h = 0 , pak $\qquad J = m L^2 / 3$

Pro osu jdoucí středem tyče h = L / 2 je $\qquad J = m L^2 / 12$

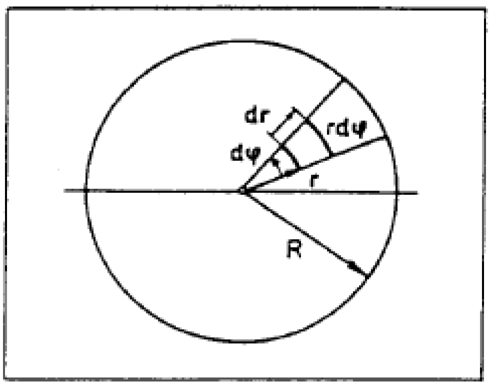
Tento příklad můžeme řešit také přímo bez užití vztahu (4.9). Vyjádříme element hmotnosti tyče

$$dm = \rho dV = \rho S dx = \rho S L \, dx / L = m \, dx / L$$

Dosadíme do (5.3) $r^2 = x^2$ a dostaneme

$$J_z = \frac{m}{L} \int_{h}^{L-h} x^2 dx = \frac{1}{3} m \left(L^2 - 3 L h + 3 h^2 \right) .$$

9. Příklad 3.6 na str. 35 - 36 UT [2]



obr. 34

Příklad 3.6

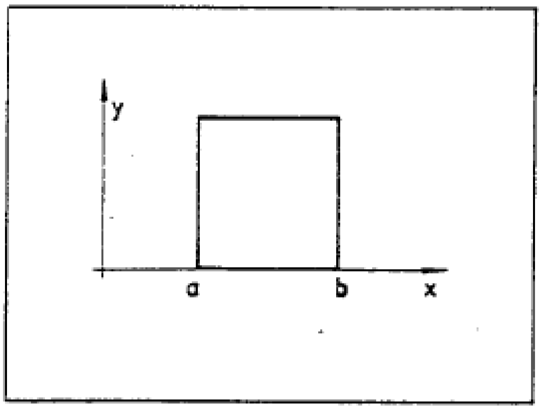
Vypočítejte moment setrvačnosti homogenní válcové desky o poloměru R, tloušťce t a hustotě ρ vzhledem k ose jdoucí středem desky.

Řešení : (obr. 34). Element plochy desky je $dS = r\,d\varphi\,dr$, element objemu dV je $dV = r\,t\,d\varphi\,dr$, moment setrvačnosti vzhledem k uvedené ose je

$$J = t\int_0^R \int_0^{2\pi} r^3\,dr\,d\varphi = \frac{1}{2}\pi R^2 t\rho\,.\,R^2 = \frac{1}{2} m R^2$$

kde m je hmotnost desky. Tento výsledek získáme snadněji užitím Guldinova pravidla. Válcová deska je rotační těleso, jehož plášť vznikl rotací úsečky na přímce $y = R$ pro $x \in [a, b]$, $b - a = t$ je tloušťka desky. Úsečka rotuje okolo osy x (obr. 35). Podle Guldinova pravidla :

$$J = \frac{1}{2}\pi\int_a^b R^4 \rho\,.\,dx = \frac{1}{2} m R^2$$



obr.35

10. Příklad 3.7 na str. 36 UT [2]

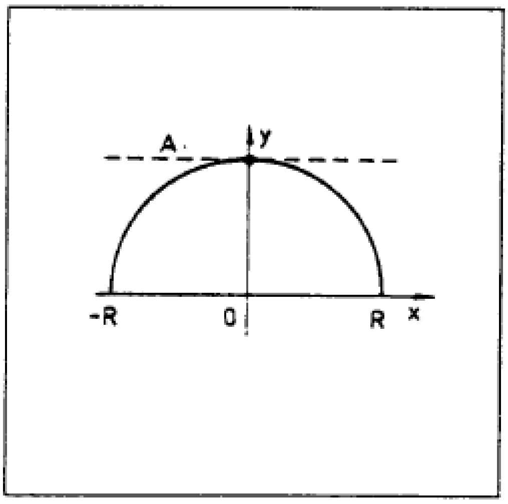
Vypočítej moment setrvačnosti J_A homogenní plné koule o poloměru R a hmotnosti m vzhledem k ose, která se dotýká koule v bodě na jejím povrchu.

Řešení: Nejprve vypočítáme moment setrvačnosti koule. U homogenní koule je těžiště totožné s geometrickým středem (obr. 36) . Podle Guldinova pravidla

$$J_x = J_T = \pi\rho\int_0^R \left(R^2 - x^2 \right)^2 dx =$$

$$= \pi\rho\left(R^4 x - \frac{2}{3} R^2 x^3 + \frac{1}{5} x^5 \right)_0^R =$$

$$= \frac{8}{15}\pi\rho R^5 = \frac{2}{5} m R^2$$



obr. 36

Nyní aplikujeme Steinerovu větu :

$$J_A = J_T + mR^2 = \frac{7}{5} m R^2$$

Moment setrvačnosti homogenní koule vzhledem k ose jdoucí těžištěm je úměrný páté mocnině jejího poloměru. Při rotaci homogenní koule kolem osy jdoucí bodem dotyku na jejím povrchu je moment setrvačnosti 1.4 x větší než moment setrvačnosti hmotného bodu umístěného v těžišti koule.

11. Příklad 3.8 na str. 39 UT [2]

Akrobat skáče salto : odrazí se nohama od země a tak získá rychlost rotace $\omega_1 = 2\pi\, s^{-1}$ vzhledem k vodorovné ose jdoucí jeho těžištěm. Jeho moment setrvačnosti je přitom $J_1 = 1{,}5$ kg m^2 . Aby zvýšil svoji úhlovou rychlost, akrobat přitáhne ruce i nohy k tělu , takže jeho moment setrvačnosti klesne na $J_2 = 0{,}5$ kg m^2. Určete jeho novou úhlovou rychlost ω_2 .

Řešení : Obecný pohyb akrobata rozložíme na postupný pohyb těžiště a na rotaci kolem osy jdoucí těžištěm. Vzhledem k této ose tíha nepůsobí otáčivý moment. Proto platí M = 0 , takže

$$b_1 = J_1\,\omega_1 = b_2 = J_2\,\omega_2 = \text{konst.}$$

Odtud plyne

$$\omega_2 = \omega_1 \,.\, (\, J_1 / J_2 \,) = 6\pi\, s^{-1}$$

Kinetická energie akrobata v prvé fázi salta je

$$E_{k1} = \frac{1}{2} J_1\,\omega_1^2 = 3\pi^2 J$$

Po přitažení rukou a nohou k tělu je

$$E_{k2} = \frac{1}{2} J_2\,\omega_2^2 = 9\pi^2 J$$

Rozdíl kinetických energii je roven práci , kterou akrobat vykonal přitažením rukou a nohou k tělu :

$$W = E_{k2} - E_{k1} = 6\pi^2 J$$

12. Příklad 3.9 na str. 39 - 40 UT [2]

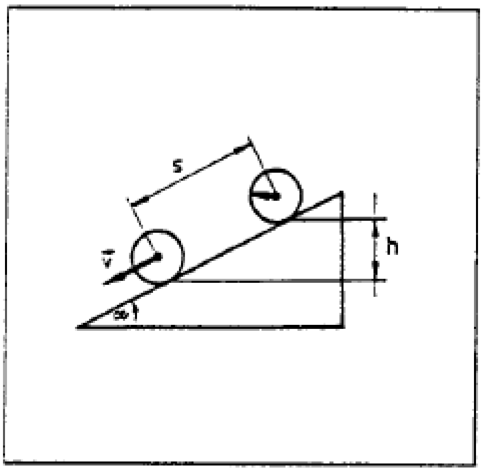
Po nakloněné rovině o úhlu α se pohybuje homogenní plný válec o poloměru R. Předpokládejte, že nedochází ke smýkání válce po podložce. Vypočítejte rychlost válce po vykonání dráhy s podél nakloněné roviny. Počáteční rychlost válce je nulová.

Řešení : (obr. 39). Kinetická energie válce je

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} m R_g^2 \omega^2$$

kde $R_g = (J / m)^{\frac{1}{2}}$ je poloměr setrvačnosti válce.Jelikož $\omega = v / R$, platí

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 \left(1 + R_g^2 / R^2 \right) .$$



obr . 39

Pokles potenciální energie je roven přírůstku kinetické energie :

$$m g h = \frac{1}{2} m v^2 \left(1 + R_g^2 / R^2 \right)$$

Protože $h = s . \sin \alpha$, dostaneme

$$v^2 = 2 g s . \sin \alpha \left(1 + R_g^2 / R^2 \right)^{-1}$$

Podle příkladu 3.6 je $J = \frac{1}{2} m R^2$, takže $R_g^2 = R^2 / 2$, a proto

$$v^2 = \frac{4}{3} g s . \sin \alpha$$

13. Příklad 3.11 na str. 42 UT [2]

Vyjádřete kinetickou energii tuhého tělesa při rotaci okolo pevné osy a odvoďte pohybový zákon pro rotaci tuhého tělesa okolo pevné osy.

Řešení : Kinetická energie tuhého tělesa při rotaci je...... $E_k = \frac{1}{2} J \cdot \omega^2$

Elementární práce vnějších sil při otočení o úhel $d\varphi$ je............ $dW = M \cdot d\varphi$

Tato práce je rovna diferenciálu kinetické energie ..$d E_k = J \omega d \omega = M \cdot d\varphi$

Pro diferenciály platí : $\omega \cdot d \omega = \frac{d \varphi}{dt} d\omega = d \varphi \cdot \frac{d \omega}{dt} = \varepsilon \cdot d\varphi$, takže........

$$M d\varphi = J \varepsilon d\varphi .$$

Odtud plyne pohybová rovnice pro rotaci tuhého tělesa okolo pevné osy $\vec{M} = J \vec{\varepsilon}$

Dodatek k průvodci GB01 – P04
Kontrolní otázky a příklady v učebním textu UT [3]:
Koktavý B.. Mechanické kmitání a vlnění, PC-DIR, 1995

1. Otázky 1-12 na str. 6 – 7 UT [3]

1. Definujte kmitavý pohyb tělesa a uveďte příklady kmitavých pohybů.
2. Charakterizujte rozdíly mezi kmitavým pohybem tělesa zavěšeného na pružině a kmitavým pohybem fyzického kyvadla.
3. Popište charakteristické znaky periodických pohybů a uveďte, jakou podmínku musí každý periodický pohyb splňovat.
4. Jmenujte druhy běžných mechanických periodických pohybů.
5. Kterými funkcemi se vyjadřuje harmonické kmitání?
6. Co znamená slovo kvaziperiodický a v jakém smyslu se používá pro kmitavé pohyby?
7. Popište model ideálního bezeztrátového oscilátoru a jeho funkci.
8. Jaký účinek na kmitání mají síly vyvozované odpory v oscilátoru?
9. Vysvětlete, jak probíhají při kmitání ideálního oscilátoru (podle obr.1.1) vzájemné přeměny dvou forem mechanické energie, tj. potenciální v kinetickou a naopak.
10. Jakou funkci při kmitání tělesa plní direktivní síla?
11. Vysvětlete rozdíly mezi vlastními a nucenými kmity oscilátoru.
12. Uveďte příklady lineárních, rovinných a prostorových kmitů.

2. Příklad 1 na str. 9 - 10 UT [3]

Závaží o hmotnosti $m = 100$ g je zavěšeno na pružinu o tuhosti $k = 1000\ \mathrm{N.m^{-1}}$. Je silou $F = 40$ N vychýleno z rovnovážné polohy a v čase $t = 0$ je uvolněno. Určete:
a) amplitudu výchylky u_m,
b) úhlovou frekvenci ω, frekvenci f a periodu pohybu T,
c) výchylku v čase $t = 2$ s,
d) amplitudu rychlosti v_m,
e) rychlost v čase $t = 2$ s,
f) amplitudu zrychlení a_m,
g) zrychlení v čase $t = 2$ s.

Řešení:

a) Předpokládáme, že pružina působí na závaží elastickou silou F_d, která je dána vztahem $F_d = -k\,u$, kde u je výchylka závaží z rovnovážné polohy. Při vychýlení závaží z rovnovážné polohy vnější silou F nabývá výchylka maximální hodnoty u_m, která je současně amplitudou výchylky kmitavého pohybu. Podle principu akce a reakce platí

$$F = -F_d = k\,u_m,$$

$$u_m = \frac{F}{k} = \frac{40\ \mathrm{N}}{1000\ \mathrm{N.m^{-1}}} = 4.10^{-2}\ \mathrm{m}.$$

b) Úhlovou frekvenci ω určíme ze vztahu (1.12). Platí

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{1000\ \mathrm{N.m^{-1}}}{0{,}1\ \mathrm{kg}}} = 100\ \mathrm{s^{-1}}.$$

Frekvence $f = \dfrac{\omega}{2\pi} = \dfrac{100\ s^{-1}}{2\pi} = 15{,}92$ Hz.

Perioda $T = \dfrac{1}{f} = 0{,}063$ s.

c) Protože je velikost direktivní síly přímo úměrná velikosti výchylky závaží z rovnovážné polohy, koná závaží po uvolnění harmonický kmitavý pohyb, daný rovnicí

$$u = u_m \sin(\omega t + \varphi_0) = 4.10^{-2}\mathrm{m}\ \sin\left(100\ \mathrm{rad.s^{-1}}\ t + \frac{\pi}{2}\right),$$

kde velikost počáteční fáze $\varphi_0 = \dfrac{\pi}{2}$ vyplývá z podmínky $u(0) = u_m$. V čase $t = 2$ s je výchylka závaží dána vztahem

$$u(2\ \mathrm{s}) = 4.10^{-2}\ \mathrm{m}\ \sin\left(100\ \mathrm{rad.s^{-1}}\ .\ 2\ \mathrm{s} + \frac{\pi}{2}\right) = 1{,}95.10^{-2}\ \mathrm{m}.$$

d) Rychlost kmitavého pohybu je dána derivací výchylky podle času

$$v = \frac{du}{dt} = \omega\ u_m \cos(\omega t + \varphi_0) = v_m \cos(\omega t + \varphi_0).$$

Amplituda rychlosti

$$v_m = \omega\ u_m = 100\ s^{-1}\ .\ 4.10^{-2}\ m = 4\ m.s^{-1}.$$

e) Rychlost v čase $t = 2$ s je

$$v(2\ s) = 4\ m.s^{-1} \cos(100\ rad.s^{-1}\ .\ 2\ s + \frac{\pi}{2}) = 3{,}49\ m.s^{-1}.$$

f) Zrychlení kmitavého pohybu je dáno derivací rychlosti podle času

$$a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 u_m \sin(\omega t + \varphi_0) = a_m \sin(\omega t + \varphi_0 + \pi),$$

$$a_m = \omega^2 u_m = (100\ s^{-1})^2\ .\ 4.10^{-2}\ m = 400\ m.s^{-2}.$$

g) Zrychlení v čase $t = 2$ s je

$$a(2\ s) = -4.10^2\ m.s^{-2} \sin(100\ rad.s^{-1}\ .\ 2\ s + \frac{\pi}{2}) = -195\ m.s^{-2}.$$

3. Příklad 2 na str. 12 - 13 UT [3]

V příkladu 1. určete:

a) kinetickou energii oscilátoru v čase $t = 2$ s,

b) potenciální energii oscilátoru v čase $t = 2$ s,

c) celkovou energii,

d) střední hodnotu kinetické a potenciální energie,

e) efektivní výchylku a efektivní rychlost.

Řešení:

a) Podle (1.14) je kinetická energie dána vztahem

$$E_k = \frac{1}{2} m\, \omega^2 u_m^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0).$$

V čase $t = 2$ s je kinetická energie rovna

$$E_k(2\text{ s}) = \frac{1}{2}.0{,}1\text{ kg}.(100\text{ s}^{-1})^2.(4.10^{-2}\text{m})^2 \cos^2(100\text{ rad.s}^{-1}.2\text{ s} + \frac{\pi}{2}) = 0{,}61\text{ J}.$$

b) Potenciální energii oscilátoru určíme podle vztahu (1.17)

$$E_p = \frac{1}{2} k u^2 = \frac{1}{2} k u_m^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0).$$

V čase $t = 2$ s platí

$$E_p(2\text{ s}) = \frac{1}{2}.10^3\text{ N.m}^{-1}.\ (4.10^{-2}\text{ m})^2 \sin^2(100\text{ rad.s}^{-1}.2\text{ s} + \frac{\pi}{2}) = 0{,}19\text{ J}.$$

c) Celková energie je dána prací, potřebnou na protažení pružiny o délku u_m, tedy

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2} k u_m^2 = \frac{1}{2}.10^3\text{ N.m}^{-1}.(4.10^{-2}\text{ m})^2 = 0{,}80\text{ J}.$$

d) Střední hodnota kinetické energie je podle (1.21) rovna střední hodnotě potenciální energie a rovná se polovině celkové energie, tedy

$$\bar{E}_k = \bar{E}_p = \frac{E}{2} = 0{,}40\text{ J}.$$

e) Efektivní rychlost určíme na základě vztahu (1.23). Platí

$$v_{ef} = \frac{v_m}{\sqrt{2}} = \frac{4\text{ m.s}^{-1}}{\sqrt{2}} = 2{,}83\text{ m.s}^{-1},$$

kde jsme podle příkladu 1. dosadili $v_m = 4\text{ m.s}^{-1}$. Podobně z (1.25) vyplývá

$$u_{ef} = \frac{u_m}{\sqrt{2}} = \frac{4.10^{-2}\text{ m}}{\sqrt{2}} = 2{,}83.10^{-2}\text{ m}.$$

4. Otázky 1 – 14 na str. 14 UT [3]

1. Napište vztah pro výchylku harmonického kmitavého pohybu. Uveďte význam jednotlivých veličin a jejich jednotky.
2. Lze tentýž harmonický pohyb popsat jak funkcí sinus, tak i funkcí kosinus?
3. Definujte rychlost a zrychlení harmonického pohybu.
4. Co vyjadřuje znaménko minus ve vztahu (1.8) pro časový průběh zrychlení harmonického kmitavého pohybu?
5. Jaký vztah platí mezi amplitudami výchylky, rychlosti a zrychlení?
6. Nakreslete časový průběh výchylky, rychlosti a zrychlení harmonického pohybu.
7. Jaké vlastnosti má síla, která způsobuje harmonický kmitavý pohyb?
8. Vysvětlete rozdíl mezi elastickou a kvazielastickou silou.
9. Jak určíme tuhost pružiny?
10. Odvoďte vztah pro kinetickou energii harmonického oscilátoru.
11. Odvoďte vztah pro elastickou potenciální energii oscilátoru.
12. Jakou maximální energii má těleso, vykonávající harmonický pohyb?
13. Aplikujte zákon zachování mechanické energie na pohyb tělesa zavěšeného na pružině.
14. Odvoďte pohybovou rovnici lineárního harmonického oscilátoru.

5. Příklady 15 – 17 na str. 14 UT [3]

15. Kmitavý pohyb harmonického oscilátoru je popsán funkcí

$$u = 0{,}04\ \text{m} \sin(12{,}56\ \text{rad.s}^{-1}\ t + 0{,}52\ \text{rad}).$$

Určete: a) amplitudu výchylky, úhlovou frekvenci, periodu, frekvenci a počáteční fázi pohybu, b) rychlost a zrychlení pohybu, c) polohu, rychlost a zrychlení v čase $t = 0$, d) nakreslete grafy závislosti výchylky, rychlosti a zrychlení na čase.
[$u_m = 0{,}04$ m; $\omega = 12{,}56\ \text{s}^{-1}$; $T = 0{,}5$ s; $f = 2$ Hz; $\varphi_0 = 0{,}52$ rad; $v = 0{,}50\ \text{m.s}^{-1} \cos(12{,}56\ \text{rad.s}^{-1}\ t + 0{,}52\ \text{rad})$; $a = -6{,}31\ \text{m.s}^{-2} \sin(12{,}56\ \text{rad.s}^{-1}\ t + $ $+ 0{,}52\ \text{rad})$; $u(0) = 0{,}02$ m; $v(0) = 0{,}43\ \text{m.s}^{-1}$; $a = -3{,}14\ \text{m.s}^{-2}$].

16. Těleso upevněné na pružině koná harmonické kmity s amplitudou výchylky 12 cm a frekvencí 4 Hz. Vypočítejte: a) maximální hodnotu rychlosti a zrychlení, b) rychlosti a zrychlení při výchylce 6 cm, c) čas potřebný k tomu, aby se těleso dostalo z rovnovážné polohy do bodu ve vzdálenosti 6 cm od ní.
[$v_m = 3{,}02\ \text{m.s}^{-1}$; $a_m = 75{,}80\ \text{m.s}^{-2}$; $v = 2{,}61\ \text{m.s}^{-1}$; $a = -37{,}9\ \text{m.s}^{-2}$; $t = 0{,}021$ s].

17. Těleso zavěšené na pružině vykonává harmonické kmity. Vypočtěte: a) jaká část z celkové energie E oscilátoru připadne na potenciální energii elastickou a kinetickou energii v okamžiku, kdy je výchylka tělesa rovna polovině amplitudy výchylky u_m, b) určete výchylku tělesa, při níž kinetická a potenciální energie elastická nabývají stejné hodnoty. [$E_p = \dfrac{E}{4}$, $E_k = \dfrac{3}{4} E$; $u = u_m/\sqrt{2}$].

6. Příklad 3 na str. 18 – 19 UT [3]

Těleso o hmotnosti $m = 0{,}1$ kg kmitá na pružině o tuhosti $k = 90$ N.m^{-1}. V čase $t=0$ má výchylku $u(0) = 0{,}04$ m a rychlost $v(0) = 0$. Mechanická rezistance $R_m = 0{,}6$ N.m^{-1}.s. Určete výchylku a rychlost kmitavého pohybu v čase $t = 0{,}1$ s a logaritmický dekrement tlumení Λ.

Řešení:

Ověříme nejdříve, zda se jedná o podkriticky tlumený pohyb. Pro tento pohyb musí podle (1.34) platit $\delta < \omega_0$, kde δ je činitel tlumení a ω_0 je úhlová frekvence vlastních kmitů. Podle (1.30) platí

$$\delta = \frac{R_m}{2m} = \frac{0{,}6\ \mathrm{N.m^{-1}.s}}{2\,.\,0{,}1\ \mathrm{kg}} = 3\ \mathrm{s^{-1}},$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{90\ \mathrm{N.m^{-1}}}{0{,}1\ \mathrm{kg}}} = 30\ \mathrm{s^{-1}},$$

tedy $\omega_0 > \delta$. Podle (1.40) je výchylka podkriticky tlumeného pohybu $u = u_0\,\mathrm{e}^{-\delta t}\sin(\omega_1 t + \varphi_0)$, kde úhlová frekvence tlumených kmitů ω_1 se určí podle (1.35)

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \sqrt{(30\ \mathrm{s^{-1}})^2 - (3\ \mathrm{s^{-1}})^2} = 29{,}8\ \mathrm{s^{-1}}.$$

Počáteční fáze φ_0 a amplituda u_0 se určí z počátečních podmínek. Platí

$$u(0) = u_0 \sin\varphi_0,$$

$$v(0) =$$

$$v(0) = \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0} = [u_0(-\delta)\,e^{-\delta t}\sin(\omega_1 t + \varphi_0) + u_0\,e^{-\delta t}\,\omega_1\cos(\omega_1 t + \varphi_0)]_{t=0} =$$

$$= -u_0\,\delta\sin\varphi_0 + u_0\,\omega_1\cos\varphi_0 = 0\ ,$$

$$\mathrm{tg}\ \varphi_0 = \frac{\omega_1}{\delta} = \frac{29{,}8\ \mathrm{s^{-1}}}{3\ \mathrm{s^{-1}}} = 9{,}93,$$

$$\varphi_0 = \mathrm{arctg}\ 9{,}93 = 1{,}47\ \mathrm{rad}.$$

Potom

$$u_0 = \frac{u(0)}{\sin\varphi_0} = \frac{0{,}04\ \mathrm{m}}{\sin 1{,}47\ \mathrm{rad}} = 4{,}02\ \mathrm{cm}.$$

Rovnice výchylky je

$$u(t) = 4{,}02.10^{-2}\ \mathrm{m}\ \mathrm{e}^{-3\,\mathrm{s}^{-1} t}\sin(29{,}8\ \mathrm{rad.s^{-1}}\,t + 1{,}47\ \mathrm{rad}).$$

V čase $t = 0{,}1$ s je fáze

$$\varphi(0{,}1\ \mathrm{s}) = 29{,}8\ \mathrm{rad.s^{-1}}\ .\ 0{,}1\ \mathrm{s} + 1{,}47\ \mathrm{rad} = 4{,}45\ \mathrm{rad}.$$

Výchylka

$$u(0{,}1\ \mathrm{s}) = 4{,}02.10^{-2}\ \mathrm{m}\ \mathrm{e}^{-3\,\mathrm{s}^{-1}.0{,}1\mathrm{s}}\sin(4{,}45\ \mathrm{rad}) = -2{,}88\ \mathrm{cm}.$$

Rychlost

$$v = u_0\, e^{-\delta t}\,(-\delta \sin \varphi + \omega_1 \cos\varphi),$$

$$v(0{,}1\ \mathrm{s}) = 4{,}02.10^{-2}\ \mathrm{m}.e^{-0{,}3}\,[-3\ \mathrm{s}^{-1}.\sin(4{,}45\ \mathrm{rad}) + 29{,}8\ \mathrm{s}^{-1}\ .\ \cos(4{,}45\ \mathrm{rad})] =$$

$$= -\,14{,}39\ \mathrm{cm.s}^{-1}.$$

Logaritmický dekrement tlumení je

$$\Lambda = \delta\, T_1 = \frac{2\,\pi\,\delta}{\omega_1} = \frac{2\pi\ .\ 3\ \mathrm{s}^{-1}}{29{,}8\ \mathrm{s}^{-1}} = 0{,}63.$$

7. Otázky 1 – 11 na str. 20 UT [3]

1. Popište důsledky působení tlumicích sil na pohyb mechanického oscilátoru.
2. Sestavte pohybovou rovnici oscilátoru, působí-li na něj tlumicí síla úměrná rychlosti.
3. Které parametry oscilátoru rozhodují o tom, zda je pohyb tlumen podkriticky, kriticky nebo nadkriticky?
4. Napište a graficky znázorněte časovou závislost výchylky oscilátoru při podkriticky tlumeném pohybu a vysvětlete význam jednotlivých veličin.
5. Zdůvodněte, proč je frekvence podkriticky tlumeného oscilátoru menší než frekvence téhož oscilátoru bez tlumení. Napište vztah mezi oběma frekvencemi.
6. Jaký je rozdíl mezi pohybem oscilátoru v případě podkritického tlumení a kritického nebo nadkritického tlumení?
7. Uveďte příklady použití kritického tlumení proti nežádoucímu kmitání mechanismů.
8. Vysvětlete význam veličiny útlum a logaritmický dekrement tlumení.

8. Příklady 9 – 11 na str. 20 UT [3]

9. Těleso zavěšené na pružině bylo vychýleno o 5 cm z rovnovážné polohy a uvolněno, takže začalo kmitat. Za dobu 12 s vykonalo osm kmitů, během nichž poklesla amplituda na 5 mm. Určete součinitel tlumení, logaritmický dekrement tlumení a amplitudu po devátém kmitu. [$\delta = 0{,}192\ \mathrm{s}^{-1}$; $\Lambda = 0{,}288$; $u_9 = 3{,}75$ mm].

10. Jaký je součinitel tlumení δ kmitů určitého tělesa, jestliže poměr dvou po sobě jdoucích maximálních výchylek na tutéž stranu má hodnotu 2 a perioda tlumených kmitů je $T_1 = 0{,}5$ s. Jaká by byla perioda vlastních kmitů T_0 za jinak stejných podmínek? [$\delta = 1{,}39\ \mathrm{s}^{-1}$; $T_0 = 0{,}497$ s].

11. Logaritmický dekrement tlumení kmitavého pohybu oscilátoru je 0,02. Určete, kolikrát se zmenší amplituda po 100 kmitech. [7,39krát].

9. Příklad 4 na str. 24 – 25 UT [3]

Na pružině o tuhosti $k = 20\ \mathrm{N.m^{-1}}$ je zavěšeno těleso o hmotnosti $m = 120$ g. Těleso koná kmitavý pohyb v takovém prostředí, že logaritmický dekrement tlumení je $\Lambda = 0{,}06$. Za předpokladu, že na soustavu působí vnější harmonická síla s amplitudou $F_m = 1{,}5.10^{-2}$ N, určete:

a) rezonanční frekvenci soustavy v případě rezonance výchylky,
b) amplitudu kmitů v případě rezonance výchylky,
c) maximální hodnotu kinetické energie soustavy v případě rezonace výchylky.

Řešení:

a) Pro rezonanční úhlovou frekvenci ω_r platí podle (1.67)

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2},$$

kde

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{20\ \mathrm{N.m^{-1}}}{0{,}12\ \mathrm{kg}}} = 12{,}910\ \mathrm{s^{-1}}.$$

Činitel tlumení δ určíme pomocí logaritmického dekrementu tlumení Λ podle (1.47) a periody tlumených kmitů $T_1 = \dfrac{2\pi}{\omega_1}$ podle (1.35),

$$\delta = \frac{\Lambda}{T_1} = \frac{\Lambda\,\omega_1}{2\pi} = \frac{\Lambda\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}{2\pi}.$$

Z tohoto vztahu vyplývá

$$\delta = \frac{\Lambda\,\omega_0}{\sqrt{4\pi^2 + \Lambda^2}} = \frac{0{,}06\ .\ 12{,}91\ \mathrm{s^{-1}}}{\sqrt{4\pi^2 + 0{,}06^2}} = 0{,}123\ \mathrm{s^{-1}}.$$

Úhlová frekvence tlumených kmitů $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = 12{,}909\ \mathrm{s^{-1}}$. Pro rezonanční úhlovou frekvenci potom platí

$$\omega_r = \sqrt{(12{,}91\ \mathrm{s^{-1}})^2 - 2\,(0{,}123\ \mathrm{s^{-1}})^2} = 12{,}909\ \mathrm{s^{-1}}.$$

Rezonanční frekvence je

$$f_r = \frac{\omega_r}{2\pi} = 2{,}05\ \mathrm{Hz}.$$

b) Rezonanční amplitudu kmitů u_{mr} určíme pomocí (1.68). Platí

$$u_{mr} = \frac{F_m}{2\,m\,\delta\,\omega_1} = \frac{1{,}5\ .\ 10^{-2}\ \mathrm{N}}{2\ .\ 0{,}12\ \mathrm{kg}\ .\ 0{,}123\ \mathrm{s^{-1}}\ .\ 12{,}909\ \mathrm{s^{-1}}} = 3{,}94\ \mathrm{cm}.$$

c) Kinetická energie oscilátoru, který koná harmonický kmitavý pohyb je podle (1.14) v rezonanci rovna

$$E_k = \frac{1}{2} m \, \omega_r^2 \, u_{mr}^2 \cos^2(\omega_r t + \varphi_0).$$

Kinetická energie nabývá maximální hodnoty, je-li $\cos(\omega_r t + \varphi_0) = 1$. Potom platí

$$E_{kmax} = \frac{1}{2} m \, \omega_r^2 \, u_{mr}^2 = \frac{1}{2} \, . \, 0{,}12 \text{ kg} \, . \, (12{,}909 \text{ s}^{-1})^2 \, . \, (3{,}94.10^{-2} \text{ m})^2 =$$

$$= 0{,}0155 \text{ J}.$$

10. Otázky 1 – 7 na str. 25 UT [3]

1. Za jakého předpokladu může reálný oscilátor konat netlumený kmitavý pohyb?
2. Jaké síly působí na oscilátor při nuceném kmitání? Sestavte pohybovou rovnici tělesa při nuceném kmitání.
3. Jaké přechodové jevy mohou nastat na začátku buzení kmitů v tlumeném oscilátoru?
4. Uveďte řešení diferenciální rovnice nucených kmitů a vyložte význam jednotlivých veličin.
5. Čím je charakterizován stav rezonance výchylky oscilátoru?
6. Jak se liší rezonanční úhlová frekvence od úhlové frekvence vlastních kmitů oscilátoru?
7. Na jakých veličinách závisí velikost amplitudy výchylky v rezonanci?

11. Příklad 8 na str. 25 UT [3]

8. Hmotný bod koná vynucené harmonické kmity. Určete rezonanční úhlovou frekvenci a rezonanční amplitudu výchylky hmotného bodu, je-li jeho hmotnost 0,1 kg, úhlová frekvence vlastních kmitů 20 s^{-1}, součinitel tlumení 3 s^{-1} a amplituda budicí síly 1 N. [19,54 s^{-1}; 8,43 cm].

12. Příklad 5 na str. 30 – 31 UT [3]

Hmotný bod koná současně dva navzájem kolmé kmitavé pohyby, vyjádřené rovnicemi

$$u_x = u_{mx} \sin \omega t \, ,$$

$$u_y = u_{my} \cos \omega t \, ,$$

kde $u_{mx} = 2$ cm, $u_{my} = 1$ cm, $\omega = \pi . s^{-1}$. Stanovte:

a) Rovnici trajektorie hmotného bodu.

b) Velikost rychlosti a zrychlení v čase 0,5 s.

Řešení:

a) Rovnici trajektorie v pravoúhlé souřadnicové soustavě v rovině s navzájem kolmými souřadnicovými osami u_x a u_y určíme vyloučením času t z rovnic pro okamžité výchylky. Platí

$$\sin\omega t = \frac{u_x}{u_{mx}} \ , \quad \cos\omega t = \sqrt{1 - \sin^2\omega t} = \sqrt{1 - \left(\frac{u_x}{u_{mx}}\right)^2} \ .$$

Potom

$$u_y = u_{my}\sqrt{1 - \left(\frac{u_x}{u_{mx}}\right)^2} \ ,$$

odkud dostaneme rovnici trajektorie

$$\left(\frac{u_x}{u_{mx}}\right)^2 + \left(\frac{u_y}{u_{my}}\right)^2 = 1 \ .$$

Po dosazení za amplitudy výchylek u_{mx} a u_{my} má rovnice trajektorie tvar

$$2{,}5.10^3\ \mathrm{m}^{-2}\, u_x^{\,2} + 10^4\ \mathrm{m}^{-2}\, u_y^{\,2} = 1 \ .$$

Trajektorií je elipsa x s poloosami 2 cm a 1 cm, se středem v počátku souřadnicové soustavy a s osami ležícími v souřadnicových osách.

b) Vektor rychlosti má ve směru souřadnicové osy u_x souřadnici rychlosti

$$v_x = \frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}t} = \omega\, u_{mx}\cos\omega t \ ,$$

ve směru souřadnicové osy u_y souřadnici

$$v_y = \frac{\mathrm{d}u_y}{\mathrm{d}t} = -\omega\, u_{my}\sin\omega t \ .$$

Velikost rychlosti

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \omega\sqrt{u_{mx}^2\cos^2\omega t + u_{my}^2\sin^2\omega t} \ .$$

V čase $t = 0{,}5$ s dostáváme

$$v(0{,}5\ \mathrm{s}) = \pi.\mathrm{s}^{-1}\sqrt{(2.10^{-2}\ \mathrm{m})^2\cos^2(\pi.\mathrm{s}^{-1}.0{,}5\ \mathrm{s}) + (1.10^{-2}\ \mathrm{m})^2\sin^2(\pi.\mathrm{s}^{-1}.0{,}5\ \mathrm{s})} = $$
$$= 3{,}14\ \mathrm{cm.s^{-1}} \ .$$

Podobně

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \omega^2\sqrt{u_{mx}^2\sin^2\omega t + u_{my}^2\cos^2\omega t} \ ,$$

$$a(0{,}5\ \mathrm{s}) = (\pi.\mathrm{s}^{-1})^2.\sqrt{(2.10^{-2}\ \mathrm{m})^2.\sin^2(\pi.\mathrm{s}^{-1}.0{,}5\ \mathrm{s}) + (1.10^{-2}\ \mathrm{m})^2\cos^2(\pi.\mathrm{s}^{-1}.0{,}5\ \mathrm{s})} = $$
$$= 19{,}7\ \mathrm{cm.s^{-2}}.$$

13. Otázky 1 – 5 na str. 32 - 33 UT [3]

1. Jaké kmity vznikají při skládání stejnosměrných kmitů stejných frekvencí?
2. Vysvětlete metodu skládání stejnosměrných kmitů pomocí rotujících vektorů.
3. Mohou být výsledné kmity při skládání stejnosměrných kmitů různých frekvencí harmonické? Za jaké podmínky budou tyto kmity periodické?
4. Ve kterých případech vznikají při skládání kmitů rázy? Jaká je jejich frekvence?
5. Jaké podmínky musí být splněny, aby při skládání navzájem kolmých kmitů byla trajektorií pohybu a) úsečka, b) kružnice, c) elipsa, d) jiná uzavřená křivka.

14. Příklady 6 – 9 na str. 33 UT [3]

6. Určete amplitudu výchylky, počáteční fázi a okamžitou výchylku harmonického pohybu, který vznikne složením dvou stejnosměrných pohybů s okamžitými výchylkami $u_1 = 0{,}02\ \text{m}\ \sin(5\pi \text{s}^{-1}t + \frac{\pi}{2})$ a $u_2 = 0{,}03\ \text{m}\ \sin(5\pi \text{s}^{-1}t + \frac{\pi}{4})$. [$4{,}6.10^{-2}$m; $62{,}77°$; $u = 4{,}6.10^{-2}\ \text{m}\ \sin(5\pi \text{s}^{-1}t + 0{,}35\pi)$].

7. Dva stejnosměrné harmonické pohyby stejné amplitudy výchylky, počáteční fáze a blízkých period 3 s a 3,1 s se skládají do výsledného kmitavého pohybu. Najděte jeho periodu a periodu rázů. [3,05 s; 93 s].

8. Najděte trajektorii výsledného kmitavého pohybu hmotného bodu, který vznikne složením dvou navzájem kolmých harmonických kmitavých pohybů s amplitudami výchylky 5 cm a stejnými periodami, jestliže rozdíl počátečních fází obou dílčích pohybů je $\frac{\pi}{2}$. [Kružnice o poloměru 5 cm].

9. Určete rovnici Lissajousovy křivky, která vznikne složením kmitů o okamžitých výchylkách $u_x = A \sin\omega t$, $u_y = 2A \sin 2\omega t$ a vyšetřete její vlastnosti. [$A^2u_y^2 - 16\, u_x^2(A^2 - u_x^2) = 0$].

15. Otázky 1 – 5 na str. 35 UT [3]

1. Jaký praktický význam má rozklad periodických neharmonických kmitů na součet harmonických složek?
2. Je možné vybudit do rezonance mechanický oscilátor s rezonanční frekvencí 8 Hz periodickou neharmonickou budicí silou, jejíž první harmonická má frekvenci 2 Hz?
3. Jakou informaci dává amplitudové spektrum daného mechanického kmitavého pohybu?
4. Uveďte rozdíl mezi spektrem periodického a neperiodického kmitání.
5. Vysvětlete definici spektrální hustoty amplitud.

Dodatek k průvodci GB01 – P05
Kontrolní otázky a příklady v učebním textu UT [3]:
Koktavý B.. Mechanické kmitání a vlnění, PC-DIR, 1995

1. Příklad 6 na str. 39 - 40 UT [3]

Zdroj netlumených vln kmitá podle rovnice $u = u_m \sin \omega t$, kde $u_m = 36$ mm, $\omega = 250\ \pi.s^{-1}$. Vlnění se šíří rychlostí $c = 330$ m.s^{-1}. Určete v čase $t = 0{,}2$ s:
a) výchylku bodu vzdáleného 15 m od zdroje,
b) rychlost a zrychlení tohoto bodu.

Řešení:
a) Předpokládejme, že se dané mechanické vlnění šíří v kladném smyslu osy x, jejíž počátek položíme do místa zdroje vlnění. Rovnici daného postupného vlnění můžeme potom vyjádřit ve tvaru

$$u(x, t) = u_m \sin\omega \left(t - \frac{x}{c}\right).$$

Bod ve vzdálenosti 15 m od zdroje potom koná harmonický kmitavý pohyb popsaný rovnicí

$$u(15\ \text{m}, t) = 3{,}6.10^{-2}\ \text{m} \sin \left[250\ \pi.\text{s}^{-1}\left(t - \frac{15\ \text{m}}{330\ \text{m.s}^{-1}}\right)\right] =$$
$$= 3{,}6.10^{-2}\ \text{m} \sin \left[250\ \pi.\text{s}^{-1}\ (t - 0{,}045\ \text{s})\right].$$

Výchylka tohoto bodu v čase $t = 0{,}2$ s je potom

$$u(15\ \text{m}; 0{,}2\ \text{s}) = 3{,}6.10^{-2}\ \text{m} \sin \left[250\ \pi.\text{s}^{-1}(0{,}2\ \text{s} - 0{,}045\ \text{s})\right] =$$
$$= 3{,}27.10^{-2}\ \text{m}.$$

b) Rychlost bodu ve vzdálenosti x v čase t je

$$v(x, t) = \frac{\partial u}{\partial t} = \omega\, u_m \cos\omega\left(t - \frac{x}{c}\right).$$

Zrychlení tohoto bodu je

$$a(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\omega^2 u_m \sin\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) = -\omega^2 u(x, t).$$

Pro $x = 15$ m, $t = 0{,}2$ s dostáváme

$$v(15\ \text{m}; 0{,}2\ \text{s}) = 250\ \pi.\text{s}^{-1} \,.\, 3{,}6.10^{-2}\ \text{m} \,.\, \cos \left[250\ \pi.\text{s}^{-1}\left(0{,}2\ \text{s} - \frac{15\ \text{m}}{330\ \text{m.s}^{-1}}\right)\right] =$$
$$= -\ 11{,}74\ \text{m.s}^{-1}.$$

Podobně pro zrychlení dostáváme

$$a(15\ \text{m}; 0{,}2\ \text{s}) = -\omega^2 u(15\ \text{m}; 0{,}2\ \text{s}) =$$
$$= -(250\ \pi.\text{s}^{-1})^2 \,.\, 3{,}27.10^{-2}\ \text{m} = -2{,}02.10^4\ \text{m.s}^{-2}.$$

2. Otázky 1 – 11 na str. 40 UT [3]

1. Uveďte základní části mechanické kmitavé soustavy.
2. Vysvětlete rozdíl mezi kmitavou soustavou se soustředěnými prvky a kmitavou soustavou s rozloženými prvky.
3. Popište model pružného prostředí.
4. Jak lze obecně definovat vlnění a čím se vyznačuje mechanické vlnění?
5. Uveďte předpoklady a postup vzniku mechanického vlnění v bodové řadě.
6. Vysvětlete rozdíl mezi vlněním postupným a vlněním stojatým.
7. Jaký je rozdíl mezi příčným a podélným vlněním?
8. Proč se rychlosti šíření vlnění říká fázová rychlost?
9. Co vyjadřuje vlnová délka? Jak souvisí s frekvencí?
10. Napište závislost výchylky částice bodové řady na čase a poloze pro harmonické vlnění.
11. U jakého druhu vlnění mluvíme o polarizaci a jaké druhy polarizace vlnění znáte?

3. Příklady 12 – 14 na str. 40 UT [3]

12. Zdroj kmitů budí počátek bodové řady podle vztahu $u(0, t) = 2.10^{-3}\ \mathrm{m} \sin 2{,}5\ \pi.\mathrm{s}^{-1}t$. Napište rovnici vlnění, které se šíří bodovou řadou v kladném smyslu osy x rychlostí 300 m.s^{-1}. [$u(x, t) = 2.10^{-3}\ \mathrm{m} \sin [2{,}5\ \pi.\mathrm{s}^{-1}\ (t - \dfrac{x}{300\ \mathrm{m.s}^{-1}})]$].

13. Od zdroje kmitů se šíří bodovou řadou vlnění o amplitudě 50 mm a vlnové délce 0,75 m rychlostí 300 m.s^{-1} . Během jaké doby od vzniku kmitů ve zdroji bude mít bod ve vzdálenosti 0,5 m od zdroje výchylku 25 mm? [f = 400 Hz; 1,87.10^{-3} s].

14. Harmonické vlnění o frekvenci 500 Hz a amplitudě výchylky 0,25 mm se šíří vzduchem. Délka vlny je 0,7 m. Určete rychlost šíření vlnění a maximální rychlost kmitavého pohybu částic vzduchu. [350 m.s^{-1}; 0,785 m.s^{-1}].

4. Otázky 1 – 7 na str. 45 UT [3]

1. Jaký časový průběh má výsledné vlnění, které vzniká interferencí dvou postupných harmonických vlnění stejné frekvence a stejného směru?
2. Za jakých podmínek se mohou interferencí dvě vlnění vyrušit?
3. Jaké podmínky musí být splněny, aby vzniklo úplné stojaté vlnění?
4. Čím se vyznačují uzly a kmitny u stojatého vlnění?
5. Jaký je rozdíl mezi částečným a úplným stojatým vlněním?
6. Za jaké podmínky dochází při vlnění v bodové řadě oboustranně volné, upevněné uprostřed, k rezonanci?
7. Jaký význam má vlnová rovnice?

5. Příklady 8 – 9 na str. 45 UT [3]

8. Stojaté vlnění vzniklo interferencí dvou vlnění o frekvenci 475 Hz. Vzdálenost sousedních uzlů je 1,5 m. Určete fázovou rychlost šíření vlnění v daném prostředí. [1425 $m.s^{-1}$].

9. Jaká je základní frekvence vlnění, vznikajícího podélným chvěním křemenné tyče dlouhé 10 cm, upevněné uprostřed, je-li rychlost podélného vlnění 5 500 $m.s^{-1}$? [27,5 kHz].

6. Otázky 1 – 8 na str. 48 UT [3]

1. Vysvětlete rozdíl mezi pojmy čelo vlny a vlnoplocha.
2. Jaký je vztah mezi vlnoplochou a paprskem?
3. Jaké vlastnosti musí splňovat zdroj vlnění, který vysílá vlnění s kulovými vlnoplochami?
4. Jaké vlastnosti musí mít zdroj vlnění, který vysílá vlnění s rovinnými vlnoplochami?
5. Vysvětlete význam Huygens-Fresnelova principu.
6. K jakým jevům dochází při šíření mechanického vlnění na rozhraní dvou prostředí?
7. Za jakých podmínek může dojít na rozhraní dvou různých prostředí k úplnému odrazu?
8. Za jaké podmínky se může vlnění šířit i za překážku?

7. Příklady 9 – 10 na str. 48 UT [3]

9. Zvukové vlnění dopadá ze vzduchu pod úhlem 8° na vodní hladinu. Jaký je úhel lomu? Rychlost šíření daného vlnění ve vodě je 1 500 $m.s^{-1}$, ve vzduchu 340 $m.s^{-1}$. [$37,88^{\circ}$].

10. Jaký je mezní úhel dopadu zvukového vlnění ze vzduchu, kde se šíří rychlostí 340 $m.s^{-1}$, na betonovou stěnu, ve které je rychlost tohoto vlnění 1700 $m.s^{-1}$? [$11,54^{\circ}$].

8. Otázky 1 – 4 na str. 50 UT [3]

1. Které vlastnosti látkového prostředí určují rychlost šíření vlnění?
2. Jak se liší rychlosti šíření podélného a příčného vlnění v pevných látkách?
3. Které veličiny mají vliv na rychlost šíření podélného vlnění v kapalinách?
4. Jaký je rozdíl mezi rychlostí podélného vlnění v plynech při ději izotermickém a adiabatickém?

9. Příklady 5 – 7 na str. 50 – 51 UT [3]

5. Dlouhé lano o lineární hmotnosti 0,22 kg.m^{-1} je napínáno silou 10 N. Jeden konec lana je rozkmitáván harmonicky s frekvencí 2 Hz. Určete vlnovou délku vznikajícího mechanického vlnění. [3,37 m].

6. Vypočítejte rychlost šíření příčného a podélného vlnění v ocelové tyči. Hustota oceli je 7,8.10^{3} kg.m^{-3}, modul pružnosti oceli v tahu je 2,05.10^{11} Pa, modul pružnosti ve smyku je 0,79.10^{11} Pa. [5 130 m.s^{-1}; 3 180 m.s^{-1}].

7. Určete rychlost zvukového vlnění v suchém vzduchu o hustotě 1,293 kg.m^{-3} při normálním atmosférickém tlaku 1,01325.10^{5} Pa a teplotě 0°C pro adiabatické stlačování (κ = 1,405). [331,8 m.s^{-1}.]

10. Příklad 7 na str. 53 - 54 UT [3]

Určete amplitudu akustického tlaku tónu, vydávaného ladičkou a_1(f = 440 Hz) ve vzduchu teploty 0°C při normálním atmosférickém tlaku (c = 331,8 m.s^{-1}), je-li amplituda výchylky částic vzduchu u_m = 5.10^{-9} m. Hustota vzduchu je 1,293 kg.m^{-3}. Určete dále intenzitu vlnění a hladinu intenzity.

Řešení:
Amplituda akustického tlaku je podle (2.49) dána vztahem

$$p_m = \rho\, c\, \omega\, u_m = 1{,}293\ \text{kg.m}^{-3} \,.\, 331{,}8\ \text{m.s}^{-1} \,.\, 2\pi \,.\, 440\ \text{Hz} \,.\, 5.10^{-9}\ \text{m} = 5{,}93.10^{-3}\ \text{Pa}.$$

Intenzitu vlnění určíme podle vztahu (2.58). Platí

$$I = \frac{p_{ef}^2}{\rho c} = \frac{p_m^2}{2\rho c} = \frac{(5{,}93\,.\,10^{-3}\ \text{Pa})^2}{2.1{,}293\ \text{kg.m}^{-3}.331{,}8\ \text{m.s}^{-1}} = 4{,}1.10^{-8}\ \text{W.m}^{-2}.$$

Hladina intenzity je definována vztahem (2.61) jako

$$L_I = 10\ \text{dB} \log\frac{I}{I_0} = 10\ \text{dB} \log\frac{4{,}1\,.\,10^{-8}\ \text{W.m}^{-2}}{10^{-12}\ \text{W.m}^{-2}} = 46{,}1\ \text{dB}.$$

11. Otázky 1 – 6 na str. 54 UT [3]

1. Vyjmenujte základní fyzikální parametry mechanického vlnění.
2. Jak je definována rychlost kmitavého pohybu částic pružného prostředí?
3. Vysvětlete rozdíl mezi tlakem plynu a akustickým tlakem při šíření mechanického vlnění.
4. Definujte měrný výkon přenášený mechanickým postupným vlněním.
5. Jaký je vztah mezi měrným výkonem přenášeným vlněním a intenzitou vlnění?
6. Uveďte definici hladiny intenzity vlnění a hladiny akustického tlaku.

12. Příklady 7 – 10 na str. 54 UT [3]

7. Harmonické vlnění se šíří v bodové řadě rychlostí 340 $m.s^{-1}$, frekvence vlnění je 100 Hz a amplituda výchylky je 2 mm. Určete okamžitou rychlost kmitající částice ve vzdálenosti 170 m od počátku bodové řady v čase 2 s, je-li v čase $t = 0$ výchylka počátku bodové řady rovna nule. [1,26 $m.s^{-1}$].

8. Určete hladinu intenzity harmonického vlnění o frekvenci 4 kHz ve vzduchu při teplotě 0° C, je-li amplituda akustického tlaku rovna 5.10^{-3} Pa. [44,6 dB].

9. Jaká je objemová hustota energie vlnění v prostředí, ve kterém má mechanické vlnění intenzitu 7.10^{-5} $W.m^{-2}$ a rychlost 340 $m.s^{-1}$. [$2{,}06.10^{-7}$ $J.m^{-3}$].

10. Určete hladinu intenzity vlnění, jehož intenzita je $6{,}3.10^{-5}$ $W.m^{-2}$. [78 dB].

13. Příklad 8 na str. 55 UT [3]

Porovnejte frekvence zvuku, který slyší pozorovatel za těchto podmínek:

a) Pozorovatel se pohybuje v klidném vzduchu rychlostí 30 $m.s^{-1}$ směrem k nehybnému zdroji, který vysílá harmonické zvukové vlnění o frekvenci 1000 Hz. Rychlost zvuku ve vzduchu je 340 $m.s^{-1}$.

b) Pozorovatel je v klidu a zdroj se pohybuje směrem k němu rychlostí 30 $m.s^{-1}$.

Řešení:

a) Je-li rychlost zdroje vlnění $v_z = 0$, je podle vztahu (2.64) frekvence zvuku, který vnímá pozorovatel

$$f_p = \frac{c - v_p}{c} f_z ,$$

kde dosazujeme za rychlost pozorovatele $v_p = -30\ m.s^{-1}$. Potom platí

$$f_p = \frac{340\ m.s^{-1} - (-30\ m.s^{-1}}{340\ m.s^{-1}}\ 1000\ Hz = 1088\ Hz .$$

b) Pohybuje-li se zdroj směrem k pozorovateli rychlostí $v_z = 30\ m.s^{-1}$ a pozorovatel je v klidu, platí

$$f_p = \frac{c}{c - v_z} f_z = \frac{340\ m.s^{-1}}{340\ m.s^{-1} - 30\ m.s^{-1}} = 1097\ Hz.$$